guessmaths

Devoir N° 01(8) 1éme semestre — **1ère Bac S.M** — **Durée : 02 Heures**

Exercice 1:

Donner la négation et la valeur de vérité (en justifiant) des propositions suivantes :

$P_1 : "(\forall x \in \mathbb{R})(\exists n \in \mathbb{N}) / x < n"$

$P_2 : " (\forall x \in \mathbb{Q}) \; ; x^8 \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \mathbb{Z} "$

$P_3 : "(\forall x \in \mathbb{R})(\exists p \in \mathbb{Z}) / p \leq x < p+1"$

Exercice 2:

1-Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \; ; \sqrt{n^2 + 7n + 10} \notin \mathbb{N}$.

2-Soient n un entier naturel non nul et $x_0; x_1; x_2; \ldots; x_n$ *des réels de l'intervalle* $[0;1]$.

Montrer qu'il existe x_i *et* x_j *tels que* $|x_i - x_j| \leq \frac{1}{n}$

Exercice 3:

1-Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^*) \; ; \left|x + \frac{1}{x}\right| \geq 2$.

2-Soient a; b et c des réels strictement positifs :

Montrer que : $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$ *« inégalité de Bernoulli »*

3- Soient n un entier naturel non nul et $a_1; a_2; a_3; \ldots; a_n$ *des réels strictement positifs*

Montrer par récurrence que : $\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) \times \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}\right) \geq n^2$

Exercice 4:

1- Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \; ; \; 2^{n-1} \leq n! \leq n^n$ *" (On donnera* $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times (n-1) \times n$ *.)*

2- Soient n un entier naturel non nul, On pose $U_n = \underbrace{777\ldots7}_{n \text{ fois}}$.

a- Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \; ; \; U_n = \frac{7}{9}(10^n - 1)$

b-Calculer $\sum_{k=1}^{n} U_k$

Exercice 5:

Soient A et B deux ensembles définis par :

$A = \{(x;y) \in \mathbb{R}_+^2 \; / \; x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\}$ *et* $B = \{(x;y) \in \mathbb{R}_+^2 \; / \; y^2 \leq x \leq \sqrt{y}\}$

1- Montrer que $A = B$. *Déduire que* $\forall (x;y) \in A$ *on a :* $\forall (y;x) \in A$.

2-Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^+) \; ; \; x^2 \leq \sqrt{x} \Rightarrow x \in [0;1]$.

3-Déduire que $A \subset [0;1] \times [0;1]$; et déterminer $A \cap \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$.

4-Montrer que : $A \neq [0;1] \times [0;1]$.

Exercice 6:

Soient E et F deux ensembles. A est une partie de E et B est une partie de F.

1- soit a un élément de A ; Décrire $P(P(\{a\}))$.

2-Montrer que : $C_E^A \times C_F^B \subset C_{E\times F}^{A\times B}$

3- Montrer que : $C_{E\times F}^{A\times B} = E \times C_F^B \cup C_E^A \times F$