guessmaths

Correction Examen nationale 2012Session Normale

2éme Bac SM A et B

Exercice 1 :

1) $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ et $A=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{5}-1}{2}&0&0\\0&-2&-1\\0&1&1\end{pmatrix}$

Calcul de $I-A$ et A^2

- $I-A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{5}-1}{2}&0&0\\0&-2&-1\\0&1&1\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}1-\frac{\sqrt{5}-1}{2}&0&0\\0&1+2&1\\0&-1&0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{3-\sqrt{5}}{2}&0&0\\0&3&1\\0&-1&0\end{pmatrix}$$

- $A^2=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{5}-1}{2}&0&0\\0&-2&-1\\0&1&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{5}-1}{2}&0&0\\0&-2&-1\\0&1&1\end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 4-1 & 2-1 \\ 0 & -2+1 & -1+1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{6-2\sqrt{5}}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{3-\sqrt{5}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

2) On a : $A^2 = I - A \Rightarrow A^2 + A = I$

$$\Rightarrow \begin{cases} A(A+I) = I \\ (A+I)A = I \end{cases}$$

$$\Rightarrow A(A+I) = (A+I)A = I$$

Donc A est inversible et son inverse est $(A+I)$.

D'où $A^{-1} = (A+I)$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}-1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}-1}{2}+1 & 0 & 0 \\ 0 & -2+1 & -1 \\ 0 & 1 & 1+1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}+1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

II- pour tous réels a et b de l'intervalle $I =]1,+\infty[$; on pose :

$a * b = \sqrt{a^2b^2 - a^2 - b^2 + 2}$

1) Soient x et y deux réels ; On a : $x^2y^2 - x^2 - y^2 + 2 = x^2\left(y^2-1\right) - \left(y^2-1\right) + 1$

$$= \left(x^2-1\right)\left(y^2-1\right)+1$$

Donc : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$; $x^2y^2 - x^2 - y^2 + 2 = \left(x^2-1\right)\left(y^2-1\right)+1$

2) Soient a et b deux éléments de $I =]1,+\infty[$; on a : $\begin{cases} a > 1 \\ b > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 > 1 \\ b^2 > 1 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 - 1 > 0 \\ b^2 - 1 > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left(a^2-1\right)\left(b^2-1\right)+1 > 1$$

$$\Rightarrow \sqrt{\left(a^2-1\right)\left(b^2-1\right)+1} > 1$$

$$\Rightarrow \sqrt{a^2b^2 - a^2 - b^2 + 2} > 1$$

$$\Rightarrow a * b > 1$$

Donc $(a * b) \in I$

D'où $*$ est une loi de composition interne dans I.

3) On rappelle que $\left(\mathbb{R}_+^*, \times\right)$ est un groupe commutatif.

On considère l'application : $\varphi : \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \to I \\ x \mapsto \sqrt{x+1} \end{array}$

a) • Montrons que φ est un homomorphisme de $\left(\mathbb{R}_+^*, \times\right)$ vers $(I, *)$

Soient a et b deux éléments de $\mathbb{R}_+^*$; on a :

$$\varphi(a \times b) = \sqrt{(a \times b)+1}$$

$$= \sqrt{ab+1}$$

$$\varphi(a) * \varphi(b) = \sqrt{a+1} * \sqrt{b+1}$$

$$= \sqrt{\sqrt{a+1}^2 \sqrt{b+1}^2 - \sqrt{a+1}^2 - \sqrt{b+1}^2 + 2}$$

$$= \sqrt{(a+1)(b+1) - a - 1 - b - 1 + 2}$$

$$= \sqrt{ab+1}$$

Donc $\varphi(a \times b) = \varphi(a) * \varphi(b)$

D'où φ est un homomorphisme de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ vers $(I, *)$

- Soit $y \in I$; résolvons dans $\mathbb{R}_+^*$ l'équation $y = \varphi(x)$

On a : $y = \varphi(x) \Leftrightarrow y = \sqrt{x+1}$

$$\Leftrightarrow y^2 = x+1$$

$$\Leftrightarrow x = y^2 - 1 \quad et \ (y^2 - 1) \in \mathbb{R}_+^*$$

Donc l'équation $y = \varphi(x)$ admet une solution unique dans $\mathbb{R}_+^*$

D'où φ est une bijection de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ vers $(I, *)$

Par suite φ est un isomorphisme de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ vers $(I, *)$

b) Comme $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ est un groupe commutatif et φ est un isomorphisme de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ vers $(I, *)$; donc $(I, *)$ est un groupe commutatif.

c) Montrons que l'ensemble $\Gamma = \left\{ \sqrt{1+2^m} \ / \ m \in \mathbb{Z} \right\}$ est un sous-groupe de $(I, *)$.

On a pour tout $m \in \mathbb{Z}$; $\sqrt{1+2^m} > 1$; donc $\sqrt{1+2^m} \in I$

D'où $\Gamma \subset I$

Et $\sqrt{1+2^0} = \sqrt{2} \in \Gamma \Rightarrow \Gamma \neq \varnothing$

Soit x et y deux éléments de Γ ; il existent n et m de $\mathbb{Z}$ tels que :

$x = \sqrt{1+2^n}$ et $y = \sqrt{1+2^m}$

Soit $y' = \left(\sqrt{1+2^m}\right)'$ l'inverse de y ; on a : $x * y' = \left(\sqrt{1+2^n}\right) * \left(\sqrt{1+2^m}\right)'$

$$= \varphi(2^n) * \left(\varphi(2^m)\right)'$$

$$= \varphi(2^n) * \varphi\left(\left(2^m\right)'\right)$$

$$= \varphi(2^n) * \varphi\left(\frac{1}{2^m}\right)$$

$$= \varphi\left(2^n \times \frac{1}{2^m}\right)$$

$$= \varphi(2^{n-m})$$

$$= \sqrt{1+2^{n-m}} \in \Gamma \quad (car\ (n-m) \in \mathbb{Z})$$

Donc l'ensemble $\Gamma = \left\{\sqrt{1+2^m} \ / \ m \in \mathbb{Z}\right\}$ est un sous-groupe de $(I, *)$.

Exercice 2 : (3,5 points)

I- On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation $(E): iz^2 + (2-i)az - (1+i)a^2 = 0$; où a est un nombre complexe non nul.

1) Résolvons l'équation (E)

Le discriminant de l'équation (E) est : $\Delta = (2-i)^2 a^2 - 4i \times \left(-(1+i)a^2\right)$

$$= \left((2-i)^2 + 4i(1+i)\right)a^2$$

$$= (4-4i-1+4i-4)a^2$$

$$= -a^2$$

$$= (ia)^2$$

Donc les solutions de (E) sont : $z_1 = \dfrac{-(2-i)a+ia}{2i}$ $\qquad$ $z_2 = \dfrac{-(2-i)a-ia}{2i}$

$$z_1 = \frac{(i-2)a+ia}{2i} = \frac{(i-2+i)a}{2i} = \frac{(i-1)a}{i} = \frac{i(1+i)a}{i} = (1+i)a$$

$$z_2 = \frac{(i-2)a-ia}{2i} = \frac{(i-2-i)a}{2i} = \frac{-2a}{2i} = ia$$

D'où $z_1 = (1+i)a$ et $z_2 = ia$

2) a) On a : $z_1z_2=(1+i)a\times ia$

$$=i(1+i)a^2$$

$$=(-1+i)a^2$$

Donc $z_1z_2=(-1+i)a^2$

(On peut utiliser la propriété $z_1z_2=\frac{c}{a}$ le produit des racines d'un polynôme de 2éme degré)

$$z_1z_2=\frac{-(1+i)a^2}{i}=(-1+i)a^2$$

b) Montrons que : $z_1z_2\in\mathbb{R}\Leftrightarrow Arg(a)\equiv\frac{-3\pi}{8}\left[\frac{\pi}{2}\right]$

On a : $z_1z_2\in\mathbb{R}\Leftrightarrow Arg(z_1z_2)\equiv 0[\pi]$

$$\Leftrightarrow Arg((-1+i)a^2)\equiv 0[\pi]$$

$$\Leftrightarrow Arg(-1+i)+Arg(a^2)\equiv 0[\pi]$$

$$\Leftrightarrow 2Arg(a)\equiv -Arg(-1+i)[\pi]$$

$$\Leftrightarrow 2Arg(a)\equiv -\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)[\pi]$$

$$\Leftrightarrow 2Arg(a)\equiv -\frac{3\pi}{4}[\pi]$$

$$\Leftrightarrow Arg(a)\equiv -\frac{3\pi}{8}\left[\frac{\pi}{2}\right]$$

Donc $z_1z_2\in\mathbb{R}\Leftrightarrow Arg(a)\equiv\frac{-3\pi}{8}\left[\frac{\pi}{2}\right]$

II- Soit c un réel non nul et z un nombre complexe non nul.

On considère les points A ; B ; C ; D et M d'affixes respectifs 1 ; $1+i$; c ; ic et z.

1) a) Montrons que : $A;D$ et M sont alignés $\Leftrightarrow (ic+1)z+(ic-1)\bar{z}=2ic$

On a : $A;D$ et M sont alignés $\Leftrightarrow \frac{z-1}{z-ic}\in\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \frac{z-1}{z-ic}=\overline{\left(\frac{z-1}{z-ic}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{z-1}{z-ic}=\frac{\bar{z}-1}{\bar{z}+ic}$$
$$\Leftrightarrow (z-1)(\bar{z}+ic)=(\bar{z}-1)(z-ic)$$
$$\Leftrightarrow z\bar{z}+icz-\bar{z}-ic=z\bar{z}-ic\bar{z}-z+ic$$
$$\Leftrightarrow icz+z+ic\bar{z}-\bar{z}=2ic$$
$$\Leftrightarrow (ic+1)z+(ic-1)\bar{z}=2ic$$

Donc $A;D$ et M sont alignés $\Leftrightarrow (ic+1)z+(ic-1)\bar{z}=2ic$

b) Montrons que : $(AD)\perp(OM) \Leftrightarrow (ic+1)z-(ic-1)\bar{z}=0$

On a : $(AD)\perp(OM) \Leftrightarrow \dfrac{z}{ic-1}\in i\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \overline{\left(\frac{z}{ic-1}\right)}=-\frac{z}{ic-1}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\bar{z}}{-ic-1}=-\frac{z}{ic-1}$$
$$\Leftrightarrow (ic+1)z-(ic-1)\bar{z}=0$$

Donc $(AD)\perp(OM) \Leftrightarrow (ic+1)z-(ic-1)\bar{z}=0$

2) Soit h l'affixe du point H le projeté orthogonale du point O sur la droite (AD).

a) Montrons que : $h-(1+i)=\dfrac{i}{c}(h-c)$

H le projeté orthogonale du point O sur la droite (AD) ; donc :

$$\begin{cases} A;D \text{ et } H \text{ sont alignés} \Leftrightarrow (ic+1)h+(ic-1)\bar{h}=2ic & (I) \\ (OH)\perp(AD) \Leftrightarrow (ic+1)h-(ic-1)\bar{h}=0 & (II) \end{cases}$$

Donc de $(I)+(II)$ on obtient : $2(ic+1)h=2ic \Rightarrow h=\dfrac{ic}{ic+1}$

$$\Rightarrow h=\frac{c}{c-i}$$
$$\Rightarrow h(c-i)=c$$
$$\Rightarrow ch-c-ih=0$$
$$\Rightarrow ch-c=ih$$
$$\Rightarrow ch-c-ic=ih-ic$$
$$\Rightarrow h-1-i=\frac{i}{c}(h-c)$$
$$\Rightarrow h-(1+i)=\frac{i}{c}(h-c)$$

Donc : $h-(1+i)=\dfrac{i}{c}(h-c)$

b) D'après la question précédente on a : $h-(1+i)=\dfrac{i}{c}(h-c)$

Donc $\frac{h-(1+i)}{h-c}=\frac{1}{c}i \Rightarrow \left(\overrightarrow{CH};\overrightarrow{BH}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

D'où $(CH)\perp(BH)$

Exercice 3 :

On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $(E): 143x-195y=52$

1) a) $195=1\times143+52$

$$143=2\times52+39$$
$$52=1\times39+13$$
$$39=3\times13+0$$

Donc $pgcd(195\,;143)=13$; et comme 13 divise 52 alors (E) admet des solutions dans $\mathbb{Z}^2$.

b) le couple $(-1,-1)$ est une solution particulière de (E) ; soit le couple $(x,y)\in\mathbb{Z}^2$ solution de (E) ; on a : $\begin{cases}143x-195y=52\\143\times(-1)-195\times(-1)=52\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}11x-15y=4\\11\times(-1)-15\times(-1)=4\end{cases}$

$$\Rightarrow 11x-15y=11\times(-1)-15\times(-1)$$
$$\Rightarrow 11(x+1)=15\times(y+1)$$
$$\Rightarrow 11|(15\times(y+1))$$

Et $11\wedge15=1$; donc d'après le Théorème de GAUSS :

$11|y+1\Rightarrow y+1=11k \quad (k\in\mathbb{Z})$

$\Rightarrow y=-1+11k \quad (k\in\mathbb{Z})$

On a : $11(x+1)=15\times(y+1)\Rightarrow 11(x+1)=15\times11k \quad (k\in\mathbb{Z})$

$$\Rightarrow x+1=15k \quad (k\in\mathbb{Z})$$
$$\Rightarrow x=-1+15k \quad (k\in\mathbb{Z})$$

Donc si $(x,y)\in\mathbb{Z}^2$; alors $x=-1+15k$; $y=-1+11k \quad (k\in\mathbb{Z})$

Réciproquement ; on a : $11(-1+15k)-15(-1+11k)=15-11+11\times15k-15\times11k=4$

$(-1+15k;-1+11k) \quad (k\in\mathbb{Z})$; sont solutions de (E)

Par suite l'ensemble de solutions de (E) est : $S_E=\{(-1+15k;-1+11k) \quad (k\in\mathbb{Z})\}$

2) Soit n un entier naturel non nul tel que $n \wedge 5 = 1$

Montrons que pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a : $n^{4k} \equiv 1[5]$

Comme 5 est un nombre premier ; d'après le Théorème de Fermat on a : $n^5 \equiv n[5]$

Et $n \wedge 5 = 1$ d'après le Petit Théorème de Fermat on a : $n^4 \equiv 1[5]$

D'où $n^{4k} \equiv 1[5]$; pour tout $k \in \mathbb{N}$.

3) a) Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $n^x \equiv n^y[5]$

Soient x et y deux entiers naturels non nuls tels que : $x \equiv y[4]$

On a : $x \equiv y[4] \Rightarrow (\exists k \in \mathbb{N}) / x = y + 4k$

$$\Rightarrow (\exists k \in \mathbb{N}) / x - y = 4k$$

$$\Rightarrow (\exists k \in \mathbb{N}) / n^{x-y} = n^{4k}$$

$$\Rightarrow n^{x-y} \equiv n^{4k}[5]$$

Et $n^{4k} \equiv 1[5]$; donc $n^{x-y} \equiv 1[5] \Rightarrow \dfrac{n^x}{n^y} \equiv 1[5]$

$$\Rightarrow n^x \equiv n^y[5]$$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : n^x et n^y ont la même parité ; donc $n^x - n^y$ est paire d'où $2 \mid n^x - n^y$; donc $n^x - n^y \equiv 0[2] \Rightarrow n^x \equiv n^y[2]$

Donc $\begin{cases} n^x \equiv n^y[5] \\ n^x \equiv n^y[2] \end{cases}$ et $2 \wedge 5 = 1$; par suite $\Rightarrow n^x \equiv n^y[10]$

c) Soit (x,y) un couple solution de (E) ; donc alors : $(\exists k \in \mathbb{Z})$

$x = -1 + 15k$; $y = -1 + 11k \Rightarrow x - y = 4k$

$$\Rightarrow x \equiv y[4]$$

$$\Rightarrow n^x \equiv n^y[10]$$

$$\Rightarrow n^x - n^y \equiv 0[10]$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ les nombre n^x et n^y ont le même chiffre des unités dans l'écriture dans la base 10.

Exercice 4 :

Soit n un entier naturel non nul.

On considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x) = x + \dfrac{e^{-x}}{n}$

1) • $\lim\limits_{x \to -\infty} f_n(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x + \dfrac{e^{-x}}{n}$

$$= \lim_{x\to-\infty} x\left(1+\frac{1}{nxe^{x}}\right)=+\infty \qquad \left(car \lim_{x\to-\infty} xe^{x}=0^{-}\right)$$

- $\lim_{x\to+\infty} f_n(x)=\lim_{x\to+\infty} x+\frac{e^{-x}}{n}=+\infty \qquad \left(car \lim_{x\to+\infty} e^{-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{x}}=0\right)$

2) a) $\lim_{x\to-\infty} f_n(x)=+\infty$ et $\lim_{x\to-\infty}\frac{f_n(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty} 1+\frac{e^{-x}}{nx}$

$$=\lim_{x\to-\infty} 1+\frac{1}{nxe^{x}}=-\infty \qquad \left(car \lim_{x\to-\infty} xe^{x}=0^{-}\right)$$

Donc (C_n) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $-\infty$.

b) • $\lim_{x\to+\infty}\left(f_n(x)-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(x+\frac{e^{-x}}{n}-x\right)$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^{-x}}{n}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{ne^{x}}=0 \qquad \left(car \lim_{x\to+\infty} e^{x}=+\infty\right)$$

Donc la droite (D) d'équation $y=x$ est une asymptote oblique pour (C_n) au voisinage de $+\infty$.

- On a : $f_n(x)-x=\frac{e^{-x}}{n}>0$

Donc (C_n) est au-dessus de (D) sur $\mathbb{R}$.

3) f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$; comme somme de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$; et pour tout $x\in\mathbb{R}$; on a : $f_n'(x)=1-\frac{e^{-x}}{n}$

Et $f_n'(x)=0 \Leftrightarrow 1-\frac{e^{-x}}{n}=0$ et $x\le -\ln n \Rightarrow e^{-x}\ge n$

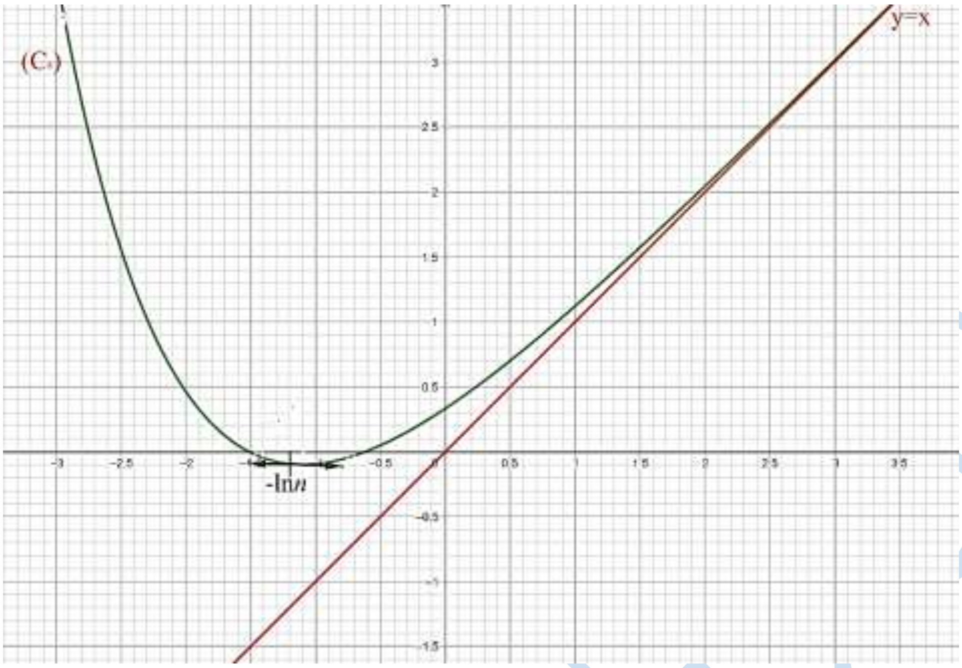
$\Leftrightarrow e^{-x}=n$ $\qquad\qquad \Rightarrow \frac{e^{-x}}{n}\ge 1$

$\Leftrightarrow x=-\ln n$ $\qquad\qquad \Rightarrow 1-\frac{e^{-x}}{n}\le 0 \Rightarrow f_n'(x)\le 0$

<u>Tableau de variations de f_n</u> $\qquad f_n(-\ln n)=1-\ln n$

x	$-\infty$		$-\ln n$		$+\infty$
$f_n'(x)$		$-$	0	$+$	
$f_n(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$1-\ln n$	$\nearrow$	$+\infty$

4) Construction de la courbe (C_3) (On prend $f_3(-1,5)=0$; $f_3(-0,6)\simeq 0$ et $\ln 3\simeq 1,1$)



5) a) Montrons que pour tout $n\geq 3$; on a : $\frac{e}{n}<\ln n$.

$$On\ a : n\geq 3 \Rightarrow \begin{cases} \frac{e}{n}\leq\frac{e}{3}<1 \\ n>e \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{e}{n}<1 \\ \ln n>1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{e}{n}<\ln n$$

Donc pour tout $n\geq 3$; on a : $\frac{e}{n}<\ln n$.

b) Montrons que pour tout $n\geq 3$; l'équation $f_n(x)=0$ admet exactement deux solutions x_n et y_n telles que : $x_n\leq -\ln n$ et $\frac{-e}{n}\leq y_n\leq 0$

<u>Pour tout $n\geq 3$</u>

- la fonction f_n est continue strictement décroissante sur $]-\infty;-\ln n]$

et $f_n(]-\infty;-\ln n])=\left[f_n(-\ln n);\lim\limits_{x\to-\infty}f_n(x)\right[=[1-\ln n;+\infty[$

Et comme $n\geq 3$; alors $1-\ln n<0$

D'où $0\in[1-\ln n;+\infty[$

Par suite l'équation $f_n(x)=0$ admet solution x_n dans $]-\infty;-\ln n]$; donc $x_n\leq -\ln n$

- la fonction f_n est continue strictement croissante sur $[-\ln n;+\infty[$

$et\ f_n([-\ln n;+\infty[) = \left[f_n(-\ln n);\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)\right[= [1-\ln n;+\infty[$

Et comme $n\geq 3$; *alors* $1-\ln n<0$

D'où $0\in[1-\ln n;+\infty[$

Par suite l'équation $f_n(x)=0$ *admet solution* y_n *dans* $[-\ln n;+\infty[$.

$$On\ a : f_n\left(\frac{-e}{n}\right)=\frac{-e}{n}+\frac{e^{\frac{e}{n}}}{n}$$

$$=\frac{1}{n}\left(e^{\frac{e}{n}}-e\right)$$

$$Et\ n\geq 3\Rightarrow n\geq e$$

$$\Rightarrow \frac{e}{n}\leq 1$$

$$\Rightarrow e^{\frac{e}{n}}\leq e$$

$$\Rightarrow e^{\frac{e}{n}}-e\leq 0$$

$$Donc\ f_n\left(\frac{-e}{n}\right)\leq 0\ \ et\ f_n(0)=\frac{1}{n}>0$$

$$D'où\ f_n\left(\frac{-e}{n}\right)\leq 0\leq f_n(0)\Rightarrow f_n\left(\frac{-e}{n}\right)\leq f_n(y_n)\leq f_n(0)$$

$$\Rightarrow \frac{-e}{n}\leq y_n\leq 0$$

(*car* f_n *est strictement croissante sur* $\left[\frac{-e}{n};0\right]\subset[-\ln n;+\infty[$; *on a* :

$\frac{e}{n}<\ln n\Rightarrow -\ln n<\frac{-e}{n}$)

c) • *On a* : $x_n\leq -\ln n$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty}-\ln n=-\infty$; *donc* $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=-\infty$

• *On a* : $\frac{-e}{n}\leq y_n\leq 0$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{-e}{n}=0$; *donc* $\lim\limits_{n\to+\infty}y_n=0$

6) *Soit* g *la fonction numérique définie sur* $[0;+\infty[$ *par* : $\begin{cases} g(x)=-1-x\ln x & ;\ x>0\\ g(0)=-1\end{cases}$

a) *Montrons que* g *est continue à droite en* 0.

$\lim\limits_{x\to0^+}g(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(-1-x\ln x)=-1$ (*car* $\lim\limits_{x\to0^+}(x\ln x)=0$)

Et $g(0)=-1$; *donc* $\lim\limits_{x\to0^+}g(x)=g(0)$

D'où g *est continue à droite en* 0.

b) *Vérifions que pour tout* $n\geq 3$; $g\left(\frac{-1}{x_n}\right)=\frac{\ln n}{x_n}$.

$$On\ a : f_n(x_n)=0 \Leftrightarrow x_n+\frac{e^{-x_n}}{n}=0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{x_n}=\frac{n}{e^{-x_n}}$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(-\frac{1}{x_n}\right)=\ln\left(\frac{n}{e^{-x_n}}\right)$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(-\frac{1}{x_n}\right)=\ln(n)-\ln\left(e^{-x_n}\right)$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(-\frac{1}{x_n}\right)=\ln(n)+x_n$$

$$Et\ g\left(-\frac{1}{x_n}\right)=-1-\left(-\frac{1}{x_n}\right)\ln\left(-\frac{1}{x_n}\right)\Leftrightarrow g\left(-\frac{1}{x_n}\right)=-1-\left(-\frac{1}{x_n}\right)\left(\ln(n)+x_n\right)$$

$$\Leftrightarrow g\left(-\frac{1}{x_n}\right)=-1+\frac{\ln(n)}{x_n}+1$$

$$\Leftrightarrow g\left(-\frac{1}{x_n}\right)=\frac{\ln(n)}{x_n}$$

c) On a : $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\ln n}{x_n}=\lim\limits_{n\to+\infty} g\left(-\frac{1}{x_n}\right)$ .et $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=-\infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{x_n}\right)=0$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} g\left(-\frac{1}{x_n}\right)=\lim\limits_{t\to0^+} g(t)=-1$

en posant : $t=-\frac{1}{x_n}$; $n\to+\infty \Rightarrow x_n\to-\infty$ alors $t\to0^+$

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\ln n}{x_n}=-1$

Exercice 5 :

On considère la fonction F définie sur $[0,1]$ par : $\begin{cases} F(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{\ln(1+2x)}{2x^2} & ;\ x\in]0;1] \\ F(0)=1 \end{cases}$

1) Soit $x\in[0,1]$

Montrons que pour tout $t\in[0;x]$ on a : $\frac{1}{1+2x}\le\frac{1}{1+2t}\le1$

On a : $t\in[0;x]\Leftrightarrow 0\le t\le x$

$$\Leftrightarrow 1 \leq 1+2t \leq 1+2x$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1+2x} \leq \frac{1}{1+2t} \leq 1$$

2) Soit $x \in]0,1]$

a) Montrons que : $F(x) = \frac{2}{x^2}\int_0^x \frac{t}{1+2t}dt$

On a : $\int_0^x \frac{t}{1+2t}dt = \frac{1}{2}\int_0^x \frac{(1+2t)-1}{1+2t}dt$

$$= \frac{1}{2}\int_0^x 1 - \frac{1}{1+2t}dt$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int_0^x 1dt - \frac{1}{2}\int_0^x \frac{2}{1+2t}dt\right)$$

$$= \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\left[\ln(1+2t)\right]_0^x$$

$$= \frac{x}{2} - \frac{\ln(1+2x)}{4}$$

Donc $\frac{2}{x^2}\int_0^x \frac{t}{1+2t}dt = \frac{2}{x^2}\left(\frac{x}{2} - \frac{\ln(1+2x)}{4}\right)$

$$= \frac{1}{x} - \frac{\ln(1+2x)}{2x^2}$$

$$= F(x)$$

Donc $F(x) = \frac{2}{x^2}\int_0^x \frac{t}{1+2t}dt$

b) Montrons que : $\frac{1}{1+2x} \leq F(x) \leq 1$

Pour tout $t \in [0;x]$; On a :

$$\frac{1}{1+2x} \leq \frac{1}{1+2t} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{t}{1+2x} \leq \frac{t}{1+2t} \leq t$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1+2x}\int_0^x tdt \leq \int_0^x \frac{t}{1+2t}dt \leq \int_0^x tdt$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1+2x}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x \leq \int_0^x \frac{t}{1+2t}dt \leq \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1+2x} \times \frac{x^2}{2} \leq \int_0^x \frac{t}{1+2t}dt \leq \frac{x^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1+2x} \leq \frac{2}{x^2}\int_0^x \frac{t}{1+2t}dt \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1+2x} \leq F(x) \leq 1$$

On a : $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{1+2x} = 1$; donc $\lim\limits_{x\to 0^+} F(x) = 1$

Et $F(0) = 1$; donc F est continue à droite en 0.

3) En utilisant une intégration par parties ; montrons que pour tout $x \in [0,1]$:

$$\int_0^x \frac{2t}{1+2t}\,dt = \frac{x^2}{1+2x} + 2\int_0^x \left(\frac{t}{1+2t}\right)^2 dt$$

On pose $\begin{cases} u(t) = \dfrac{1}{1+2t} & u'(t) = -\dfrac{2}{(1+2t)^2} \\ v'(t) = 2t & v(t) = t^2 \end{cases}$

Donc $\displaystyle\int_0^x \frac{2t}{1+2t}\,dt = \left[\frac{t^2}{1+2t}\right]_0^x - \int_0^x \frac{-2t^2}{(1+2t)^2}\,dt$

$$= \frac{x^2}{1+2x} + 2\int_0^x \left(\frac{t}{1+2t}\right)^2 dt$$

4) Soit $x \in]0,1]$

a) Montrons que : $F'(x) = -\dfrac{4}{x^3}\displaystyle\int_0^x \left(\frac{t}{1+2t}\right)^2 dt$

On a :

$$\int_0^x \frac{2t}{1+2t}\,dt = \frac{x^2}{1+2x} + 2\int_0^x \left(\frac{t}{1+2t}\right)^2 dt \Rightarrow \frac{2}{x^2}\int_0^x \frac{t}{1+2t}\,dt = \frac{1}{1+2x} + \frac{2}{x^2}\int_0^x \left(\frac{t}{1+2t}\right)^2 dt$$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{1}{1+2x} + \frac{2}{x^2}\int_0^x \left(\frac{t}{1+2t}\right)^2 dt$$

$$\Rightarrow F'(x) = -\frac{2}{(1+2x)^2} - \frac{2\times 2x}{x^4}\int_0^x \left(\frac{t}{1+2t}\right)^2 dt + \frac{2}{x^2}\left(\frac{x}{1+2x}\right)^2$$

$$\Rightarrow F'(x) = -\frac{2}{(1+2x)^2} - \frac{4}{x^3}\int_0^x \left(\frac{t}{1+2t}\right)^2 dt + \frac{2}{(1+2x)^2}$$

$$\Rightarrow F'(x) = -\frac{4}{x^3}\int_0^x \left(\frac{t}{1+2t}\right)^2 dt$$

b) Montrons que : $\dfrac{-4}{3} \le F'(x) \le \dfrac{-4}{3(1+2x)^2}$

D'après la question 1) ; on a :

$$\frac{1}{1+2x} \le \frac{1}{1+2t} \le 1 \Rightarrow \frac{t}{1+2x} \le \frac{t}{1+2t} \le t$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(1+2x)^2}\times t^2 \le \left(\frac{t}{1+2t}\right)^2 \le t^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(1+2x)^2}\times\int_0^x t^2dt \le \int_0^x\left(\frac{t}{1+2t}\right)^2 dt \le \int_0^x t^2dt$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(1+2x)^2}\times\frac{x^3}{3}\int_0^x t^2dt \le \int_0^x\left(\frac{t}{1+2t}\right)^2 dt \le \frac{x^3}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(1+2x)^2} \le \frac{3}{x^3}\int_0^x\left(\frac{t}{1+2t}\right)^2 dt \le 1$$

$$\Rightarrow -\frac{4}{3} \le -\frac{4}{x^3}\int_0^x\left(\frac{t}{1+2t}\right)^2 dt \le -\frac{4}{3}\times\frac{1}{(1+2x)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{-4}{3} \le F'(x) \le \frac{-4}{3(1+2x)^2}$$

c) En utilisant le Théorème Des Accroissements finis à la fonction F sur l'intervalle $[0;x]$ Montrer que : $\frac{-4}{3} \le \frac{F(x)-F(0)}{x} \le \frac{-4}{3(1+2x)^2}$

d) Soit $x \in]0;1]$

La fonction $F : t \mapsto \frac{1}{t} - \frac{\ln(1+2t)}{2t^2}$ est continue sur $]0;x]$ et à droite en 0 ; donc continue sur $[0;x]$; elle est dérivable sur $]0;x[$

Donc d'après le Théorème Des Accroissements finis :

$$(\exists c_x \in]0;x[) / \frac{F(x)-F(0)}{x} = F'(c_x)$$

D'une part $0 < c_x \le x \Rightarrow 1 < (1+2c_x)^2 \le (1+2x)^2$

$$\Rightarrow \frac{1}{(1+2x)^2} \le \frac{1}{(1+2c_x)^2} < 1$$

$$\Rightarrow -\frac{4}{3} < \frac{-4}{3(1+2c_x)^2} \le \frac{-4}{3(1+2x)^2} \quad (1)$$

D'autre part ; on a : $\frac{-4}{3} \le F'(c_x) \le \frac{-4}{3(1+2c_x)^2}$ $\quad (2)$

De (1) et (2) on obtient : $\frac{-4}{3} < F'(c_x) \le \frac{-4}{3(1+2x)^2}$

Donc $\frac{-4}{3} \le \frac{F(x)-F(0)}{x} \le \frac{-4}{3(1+2x)^2}$

Et on a : $\lim_{x\to 0^+} \frac{-4}{3(1+2x)^2} = \frac{-4}{3}$; alors $\lim_{x\to 0^+} \frac{F(x)-F(0)}{x} = \frac{-4}{3}$

D'où F est dérivable à droite en 0 et $F'_d(0) = \frac{-4}{3}$.