

guessmaths

Correction Examen nationale 2022 Session Normale

2ème Bac SM A et B

Exercice 1:

Partie A-

$$1- x^3 + 1 = (1 - x + x^2)(x + 1) \Leftrightarrow 1 - x + x^2 = \frac{x^3 + 1}{x + 1}$$

$$\Leftrightarrow 1 - x + x^2 - \frac{1}{x + 1} = \frac{x^3}{x + 1} \geq 0$$

$$\text{Et } x + 1 \geq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x + 1} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^3}{x + 1} \leq x^3$$

$$\Leftrightarrow 1 - x + x^2 - \frac{1}{x + 1} \leq x^3$$

$$\text{Donc } (\forall x \in \mathbb{R}^+) ; 0 \leq 1 - x + x^2 - \frac{1}{x + 1} \leq x^3$$

2. On a ; pour tout $t \geq 0$:

$$0 \leq 1 - t + t^2 - \frac{1}{t + 1} \leq t^3 \Rightarrow 0 \leq \int_0^x \left(1 - t + t^2 - \frac{1}{t + 1} \right) dt \leq \int_0^x t^3 dt$$

$$\Rightarrow 0 \leq \left[t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \ln(t + 1) \right]_0^x \leq \left[\frac{t^4}{4} \right]_0^x$$

$$\Rightarrow 0 \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ln(x + 1) \leq \frac{x^4}{4}$$

$$\text{D'où } (\forall x \in \mathbb{R}^+) : 0 \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ln(x + 1) \leq \frac{x^4}{4}$$

Partie B-

On considère la fonction f définie sur $I = [0, +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(0) = \frac{1}{2} \\ f(x) = \frac{x - \ln(1 + x)}{x^2} \text{ ; si } \forall x \in [0, +\infty[\end{cases}$$

et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1- a) Montrons que f est continue d droite en 0

On pour tout $x \geq 0$:

$$0 \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ln(x + 1) \leq \frac{x^4}{4} \Rightarrow \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \leq x - \ln(x + 1) \leq \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} - \frac{x}{3} \leq \frac{x - \ln(x+1)}{x^2} \leq \frac{x^2}{4} - \frac{x}{3} + \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} - \frac{x}{3} \leq f(x) \leq \frac{x^2}{4} - \frac{x}{3} + \frac{1}{2}$$

Et comme $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{3} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x^2}{4} - \frac{x}{3} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}$

Alors $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{1}{2}$ et $f(0) = \frac{1}{2}$; donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$

D'où f est continue d droite en 0

b) Montrons que: f est dérivable a droite en 0

On a : $\frac{1}{2} - \frac{x}{3} \leq f(x) \leq \frac{x^2}{4} - \frac{x}{3} + \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{x}{3} \leq f(x) - \frac{1}{2} \leq \frac{x^2}{4} - \frac{x}{3}$

$$\Rightarrow -\frac{1}{3} \leq \frac{f(x) - f(0)}{x} \leq \frac{x}{4} - \frac{1}{3}$$

Et comme $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x}{4} - \frac{1}{3} \right) = -\frac{1}{3}$; alors $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = -\frac{1}{3}$

f est continue d droite en 0 et $f'_d(0) = -\frac{1}{3}$

c) On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x - \ln(x+1)}{x^2} \right)$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 \left(\frac{1}{x} - \left(\frac{x+1}{x^2} \right) \frac{\ln(x+1)}{x+1} \right)}{x^2} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \left(1 - \left(\frac{x+1}{x} \right) \frac{\ln(x+1)}{x+1} \right) = 0$$

Car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{x} \right) = 1$

D'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

Par suite (C) admet l'axe des abscisses comme asymptote horizontale au voisinage de $+\infty$

2- a) f est dérivable sur $]0, +\infty[$ comme somme et quotient de fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$ et pour tout $x \in]0, +\infty[$; on a :

$$f'(x) = \left(\frac{x - \ln(1+x)}{x^2} \right)'$$

$$= \frac{(x - \ln(1+x))' x^2 - 2x(x - \ln(1+x))}{x^4}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\left(1 - \frac{1}{1+x}\right)x^2 - 2x(x - \ln(1+x))}{x^4} \\
&= \frac{x^2 - \frac{x^2}{1+x} - 2x^2 + 2x\ln(1+x)}{x^4} \\
&= \frac{-\left(x + \frac{x}{1+x} - 2\ln(1+x)\right)}{x^3} \\
&= -\frac{g(x)}{x^3}
\end{aligned}$$

Donc $(\forall x \in]0, +\infty[) ; f'(x) = -\frac{g(x)}{x^3}$; Où $g(x) = x + \frac{x}{1+x} - 2\ln(1+x)$

$$\begin{aligned}
b) \text{ Pour tout } x \in [0, +\infty[; \text{ on a : } g'(x) &= 1 + \frac{1}{(1+x)^2} - \frac{2}{1+x} \\
&= \frac{(1+x)^2 + 1 - 2(1+x)}{(1+x)^2} \\
&= \frac{x^2 + 2x + 1 + 1 - 2 - 2x}{(1+x)^2} \\
&= \frac{x^2}{(1+x)^2}
\end{aligned}$$

Et comme $x \in [0, +\infty[; \text{ alors } (1+x)^2 \geq 1 \Rightarrow 0 \leq \frac{x^2}{(1+x)^2} \leq x^2$

D'où $(\forall x \in [0, +\infty[) ; 0 \leq g'(x) \leq x^2$

$$\begin{aligned}
c) \text{ On a : } (\forall t \in [0, x]) ; 0 \leq g'(t) \leq t^2 &\Rightarrow 0 \leq \int_0^x g'(t) dt \leq \int_0^x t^2 dt \\
&\Rightarrow 0 \leq g(x) - g(0) \leq \frac{x^3}{3} \\
&\Rightarrow 0 \leq g(x) \leq \frac{x^3}{3}
\end{aligned}$$

Donc $(\forall x \in [0, +\infty[) ; 0 \leq g(x) \leq \frac{x^3}{3}$

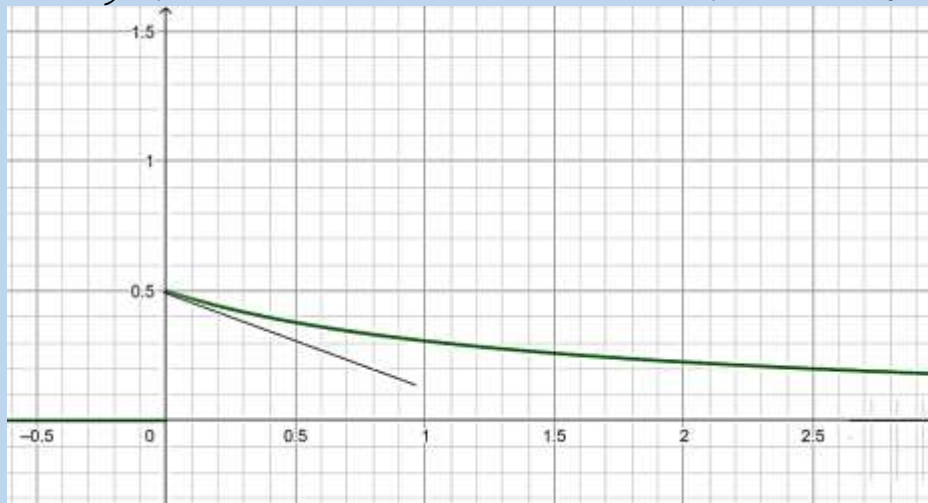
$$\begin{aligned}
d) \text{ On a pour tout } x \in]0, +\infty[; 0 \leq g(x) \leq \frac{x^3}{3} &\Rightarrow -\frac{1}{3} \leq -\frac{g(x)}{x^3} \leq 0 \\
&\Rightarrow -\frac{1}{3} \leq f'(x) \leq 0
\end{aligned}$$

D'où la fonction f est strictement croissante

3- a) Tableau de variation de f

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	—	
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	0

b) Représentation graphique de la courbe (C) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$



Partie C-

1- On considère la fonction $h : x \mapsto f(x) - x$; h est continue sur $[0, 1]$ et dérivable sur $]0, 1[$; de plus $h'(x) = f'(x) - 1$

Sachant que $-\frac{1}{3} \leq f'(x) \leq 0$; alors $-\frac{4}{3} \leq h'(x) \leq -1$

Donc h est strictement décroissante.

D'autre part on a : $h(0) = \frac{1}{2}$ et $h(1) = \frac{1 - \ln(1+1)}{1^2} - 1 = -\ln(2)$

D'où $h(0) \times h(1) < 0$

D'après TVI I il existe un unique réel $\alpha \in]0, 1[$ tel que : $f(\alpha) = \alpha$

2- On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :
$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{3} \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

a) Montrons par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n \in [0, 1]$

Pour $n=0$

On a : $u_0 = \frac{1}{3}$ donc $u_0 \in [0, 1]$

Soit $n \in \mathbb{N}$

Supposons que $u_n \in [0,1]$ et montrons que $u_{n+1} \in [0,1]$

$$\text{On a : } f([0,1]) = [f(1), f(0)] = \left[1 - \ln 2, \frac{1}{2}\right] \subset [0,1]$$

$$\text{Donc } u_n \in [0,1] \Rightarrow u_{n+1} \in [0,1]$$

Conclusion : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n \in [0,1]$

$$b) \text{ Montrons que : } (\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{3} |u_n - \alpha|$$

f est continue dérivable sur l'intervalle $[0,1]$ et $(u_n, \alpha) \in [0,1]^2$; de plus on a

$$-\frac{1}{3} \leq f'(x) \leq 0 \Rightarrow |f'(x)| \leq \frac{1}{3} ; \text{ en appliquant le théorème des inégalités des accroissements finis à } f \text{ sur } [0,1] \text{ on obtient :}$$

$$|f(u_n) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{3} |u_n - \alpha| \Rightarrow |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{3} |u_n - \alpha|$$

$$c) \text{ Montrons par récurrence que : } (\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

Pour $n=0$

$$\text{On a : } |u_0 - \alpha| = \left|\frac{1}{3} - \alpha\right| \leq 1 ; \text{ donc } |u_0 - \alpha| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^0$$

Soit $n \in \mathbb{N}$

$$\text{Supposons que } |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n \text{ et montrons que } |u_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$$

$$\text{D'après la question précédente on a : } |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{3} |u_n - \alpha| \quad (I)$$

$$\text{Et l'hypothèse de récurrence : } |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n \quad (II)$$

$$\text{De (I) et (II) ; on a : } |u_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$$

$$\text{Conclusion : } (\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$d) \text{ Comme } (\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0 \text{ (car } -1 < \frac{1}{3} < 1) ; \text{ alors}$$

$$\text{la suite } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ convergente et } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha$$

Partie D-

Pour tout $x \in I$, on pose : $F(x) = \int_x^1 f(t) dt$

1- la fonction F est la fonction primitive de f sur I qui s'annule en 1 et f est continue sur I donc F est dérivable sur I et pour tout $x \in I$ on a : $F'(x) = \frac{x - \ln(1+x)}{x^2}$

2- a) En utilisant une intégration par parties, calculons $F(x) = \int_x^1 f(t) dt$

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_x^1 f(t) dt \\ &= \int_x^1 \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} dt \end{aligned}$$

$$\text{On pose : } \begin{cases} u(t) = t - \ln(1+t) \Rightarrow u'(t) = 1 - \frac{1}{1+t} = \frac{t}{1+t} \\ v'(t) = \frac{1}{t^2} \Rightarrow v(t) = -\frac{1}{t} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Alors } F(x) &= \left[-\frac{1}{t} (t - \ln(1+t)) \right]_x^1 - \int_x^1 \left(-\frac{1}{t} \right) \left(\frac{t}{1+t} \right) dt \\ &= \ln 2 - 1 + \frac{1}{x} (x - \ln(1+x)) + \int_x^1 \frac{1}{1+t} dt \\ &= \ln 2 - 1 + \frac{1}{x} (x - \ln(1+x)) + [\ln(1+t)]_x^1 \\ &= \ln 2 - 1 + \frac{1}{x} (x - \ln(1+x)) + \ln 2 - \ln(1+x) \\ &= 2\ln 2 - \frac{1}{x} \ln(1+x) - \ln(1+x) \\ &= 2\ln 2 - \left(1 + \frac{1}{x} \right) \ln(1+x) \end{aligned}$$

$$\text{Donc } (\forall x \in]0; +\infty[) ; F(x) = 2\ln 2 - \left(1 + \frac{1}{x} \right) \ln(1+x)$$

$$\begin{aligned} \text{b) On a : } \lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(2\ln 2 - \left(1 + \frac{1}{x} \right) \ln(1+x) \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(2\ln 2 - (1+x) \frac{\ln(1+x)}{x} \right) = 2\ln 2 - 1 \end{aligned}$$

$$(car \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\ln(1+x)}{x} \right) = 1)$$

c) Soit A l'aire en cm^2 du domaine plan limite par la courbe (C) , l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 f(t) dt \left(\|i^-\|^2 \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) \quad (2cm)^2 \\ &= (2\ln 2 - 1) \times 4 \quad cm^2 \\ &= 4(2\ln 2 - 1) \quad cm^2 \end{aligned}$$

Partie E-

On pose, pour tout k de $\mathbb{N}$: $\Delta_k = f(k) - \int_k^{k+1} f(t) dt$ et pour tout n de $\mathbb{N}^*$ $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \Delta_k$

1- a) Vérifions que $(\forall k \in \mathbb{N}) : 0 \leq \Delta_k \leq f(k) - f(k+1)$

On a : $k \leq t \leq k+1 \Rightarrow f(k+1) \leq f(t) \leq f(k)$ (car f est décroissante)

$$\Rightarrow \int_k^{k+1} f(k+1) dt \leq \int_k^{k+1} f(t) dt \leq \int_k^{k+1} f(k) dt$$

$$\Rightarrow -f(k) \leq -\int_k^{k+1} f(t) dt \leq -f(k+1)$$

$$\Rightarrow 0 \leq f(k) - \int_k^{k+1} f(t) dt \leq f(k) - f(k+1)$$

$$\Rightarrow 0 \leq \Delta_k \leq f(k) - f(k+1)$$

Donc $(\forall k \in \mathbb{N}) : 0 \leq \Delta_k \leq f(k) - f(k+1)$

b) On a : $(\forall k \in \mathbb{N}) : 0 \leq \Delta_k \leq f(k) - f(k+1) \Rightarrow 0 \leq \sum_{k=0}^{n-1} \Delta_k \leq \sum_{k=0}^{n-1} f(k) - f(k+1)$

$$\Rightarrow 0 \leq S_n \leq \sum_{k=0}^{n-1} f(k) - \sum_{k=0}^{n-1} f(k+1)$$

$$\Rightarrow 0 \leq S_n \leq \sum_{k=0}^{n-1} f(k) - \sum_{k=1}^n f(k)$$

$$\Rightarrow 0 \leq S_n \leq f(0) - f(n)$$

$$\Rightarrow 0 \leq S_n \leq \frac{1}{2}$$

(car $f(n) \geq 0$ et $f(0) = \frac{1}{2}$)

Donc $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; 0 \leq S_n \leq \frac{1}{2}$

2- a) Montrons que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est monotone.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; on a : $S_{n+1} - S_n = \sum_{k=0}^n \Delta_k - \sum_{k=0}^{n-1} \Delta_k = \Delta_n$

Et d'après la question 1- a) On a $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; \Delta_n \geq 0$

Donc $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; S_{n+1} - S_n \geq 0$

D'où la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.

b) la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante majorée par $\frac{1}{2}$; alors elle est convergente.

c) Posons $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$; on a : $S_1 \leq \ell \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \Delta_0 \leq \ell \leq \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow f(0) - \int_0^1 f(t) dt \leq \ell \leq \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} - (2\ln 2 - 1) \leq \ell \leq \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2} - 2\ln 2 \leq \ell \leq \frac{1}{2}$$

EXERCICE 2:

I- Soit m un nombre complexe non nul donné et $j = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ -

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z (E_m) : $z^2 + mj^2z + m^2j = 0$

1- On a : • $j = e^{i\frac{2\pi}{3}} \Rightarrow j^3 = \left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^3$

$$\Rightarrow j^3 = e^{2i\pi} = 1$$

$$\bullet 1 + j + j^2 = 1 + e^{i\frac{2\pi}{3}} + e^{i\frac{4\pi}{3}}$$

$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = 0$$

2- a) On a : $\Delta = (mj^2)^2 - 4m^2j$

$$\begin{aligned}
 &= m^2 (1+j)^2 - 4m^2 j \\
 &= m^2 (1+2j+j^2-4j) \\
 &= m^2 (1-2j+j^2) \\
 &= [m(1-j)]^2
 \end{aligned}$$

Donc le discriminant de (E_m) est $\Delta = [m(1-j)]^2$

$$\begin{array}{l|l}
 \text{b) D'où les solutions de } (E_m) \text{ sont : } z_1 = \frac{-mj^2 - m(1-j)}{2} & z_2 = \frac{-mj^2 + m(1-j)}{2} \\
 & = \frac{m(-j^2 - 1 + j)}{2} \\
 & = mj & = m
 \end{array}$$

3- Dans cette question, on suppose que, $m = 1+i$

$$\begin{aligned}
 z_1 + z_2 &= mj + m \\
 &= (1+i)(j+1) \\
 &= -j^2(1+i) \\
 &= -e^{i\frac{4\pi}{3}} e^{i\frac{\pi}{4}} \\
 &= -e^{i\left(\frac{4\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right)} \\
 &= -e^{i\frac{19\pi}{12}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Donc } (z_1 + z_2)^{2022} &= \left(-e^{i\frac{19\pi}{12}}\right)^{2022} \\
 &= e^{i\frac{19 \times 2022 \pi}{12}} \\
 &= e^{i\frac{3202 \times 12 \pi}{12} \frac{\pi}{2}} \\
 &= e^{-i\frac{\pi}{2}}
 \end{aligned}$$

Donc est un imaginaire pur $(z_1 + z_2)^{2022}$

II- Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Soit φ la transformation du plan complexe qui de tout point $M(z)$ fait correspondre le point $M'(z')$ tel que : $z' = (1+j)z$

$$1- \text{On a : } z' = (1+j)z \Leftrightarrow z' - 0 = -j^2(z - 0)$$

$$\Leftrightarrow z' - 0 = -\left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^2 (z - 0)$$

$$\Leftrightarrow z' - 0 = (z - 0)e^{i\pi} \times e^{i\frac{4\pi}{3}}$$

$$\Leftrightarrow z' - 0 = (z - 0)e^{i\left(\pi + \frac{4\pi}{3}\right)}$$

$$\Leftrightarrow z' - 0 = (z - 0)e^{i\left(\frac{7\pi}{3}\right)}$$

$$\Leftrightarrow z' - 0 = (z - 0)e^{i\frac{\pi}{3}}$$

Donc l'application φ est une rotation de centre O est d'angle $\frac{\pi}{3}$

2- On considère les points A, B et C d'affixes respectives $m ; mj$ et mj^2

On note $A'(a') ; B'(b')$ et $C'(c')$ les images respectives des points A, B et C par l'application φ et soient $P(p), Q(q)$ et $R(r)$ les milieux respectifs des segments $[BA'] ; [CB']$ et $[AC']$

$$a) \text{ On a : } \bullet A'(a') = \varphi(A(m)) \Leftrightarrow a' = me^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$\Leftrightarrow a' = -mj^2$$

$$\bullet B'(b') = \varphi(B(mj)) \Leftrightarrow b' = mje^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$\Leftrightarrow b' = -mj^3$$

$$\Leftrightarrow b' = -m$$

$$\bullet C'(c') = \varphi(C(mj^2)) \Leftrightarrow c' = mj^2e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$\Leftrightarrow c' = -mj^2 \times j^2$$

$$\Leftrightarrow c' = -mj \times j^3$$

$$\Leftrightarrow c' = -mj$$

b) $P(p), Q(q)$ et $R(r)$ les milieux respectifs des segments $[BA'] ; [CB']$ et $[AC']$

$$\text{Donc } \begin{cases} p = \frac{mj - mj^2}{2} \\ q = \frac{mj^2 - m}{2} \\ r = \frac{m - mj}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = \frac{mj - mj^2}{2} \\ qj = \frac{mj^3 - mj}{2} \\ rj^2 = \frac{mj^2 - mj^3}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p = \frac{mj - mj^2}{2} \\ qj = \frac{m - mj}{2} \\ rj^2 = \frac{mj^2 - m}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow p + qj + rj^2 = \frac{mj - mj^2}{2} + \frac{m - mj}{2} + \frac{mj^2 - m}{2} = 0$$

$$\text{Donc } p + qj + rj^2 = 0$$

$$c) \text{ On a : } p + qj + rj^2 = 0 \Leftrightarrow p + qj + r(-1 - j) = 0$$

$$\Leftrightarrow p - r = (q - r)j$$

$$\Leftrightarrow \frac{p - r}{q - r} = j$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left| \frac{p - r}{q - r} \right| = 1 \\ \text{Arg}\left(\frac{p - r}{q - r}\right) = \frac{2\pi}{3} [2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} PR = QR \\ \left(\overrightarrow{QR}, \overrightarrow{PR}\right) = \frac{2\pi}{3} [2\pi] \end{cases}$$

Donc le triangle PQR est équilatéral.

EXERCICE 3

Soit n un entier naturel strictement supérieur 1.

On considère dans $\mathbb{N}^2$ l'équation : $(E_n) : (x+1)^n - x^n = ny$

Soit (x, y) une solution de l'équation (E_n) dans $\mathbb{N}^2$ et soit p le plus petit diviseur premier de n .

1- a) Montrons que : $(x+1)^n \equiv x^n [p]$

On a : (x, y) une solution de l'équation (E_n) dans $\mathbb{N}^2$; donc :

$$(x+1)^n - x^n = ny \Leftrightarrow (x+1)^n \equiv x^n [n]$$

$$\text{Et comme } p \mid n ; \text{ alors } (x+1)^n \equiv x^n [p]$$

b) Montrons que : p est premier avec x et avec $(x+1)$

Comme p est premier ; alors $p \wedge x = 1$ ou $p \wedge x = p$

Supposons que : $p \wedge x = p \Rightarrow x \equiv 0[p]$

$$\Rightarrow x^n \equiv 0[p]$$

$$\Rightarrow (x+1)^n \equiv 0[p]$$

$$\Rightarrow x+1 \equiv 0[p] \quad (\text{car } p \text{ est premier})$$

$$\Rightarrow 1 \equiv 0[p] \quad (\text{car } x \equiv 0[p])$$

$$\Rightarrow p \mid 1 \quad \text{ce qui est absurde car } p > 1$$

$$\text{D'où } p \wedge x = 1$$

Comme p est premier ; alors $p \wedge (x+1) = 1$ ou $p \wedge (x+1) = p$

Supposons que : $p \wedge (x+1) = p \Rightarrow x+1 \equiv 0[p]$

$$\Rightarrow (x+1)^n \equiv 0[p]$$

$$\Rightarrow x^n \equiv 0[p]$$

$$\Rightarrow x \equiv 0[p] \quad (\text{car } p \text{ est premier})$$

$$\Rightarrow p \mid x \quad \text{ce qui est absurde car } p \wedge x = 1$$

$$\text{D'où } p \wedge (x+1) = 1$$

c) On a : $p \wedge x = 1$ et $p \wedge (x+1) = 1$; donc d'après le Théorème de FERMAT

$$x^{p-1} \equiv 1[p] \text{ et } (x+1)^{p-1} \equiv 1[p]$$

$$\text{D'où } (x+1)^{p-1} \equiv x^{p-1}[p]$$

2- Supposons que n est pair, alors $p = 2$

$$\text{Donc } x+1 \equiv x[2] \Rightarrow 1 \equiv 0[2]$$

$$\Rightarrow 2 \mid 1 \quad \text{ce qui est absurde}$$

D'où si n est pair alors l'équation (E_n) n'admet pas de solution dans $\mathbb{N}^2$

3- On suppose que n est impair.

a) Montrons que : $n \wedge (p-1) = 1$

Posons $n \wedge (p-1) = d$; et supposons que $d \neq 1$

Alors il existe un nombre premier q tel que : $q \mid d$

Donc $q \mid n$ et $q \mid p-1$; d'où il existe un nombre premier q tel que : $q \mid n$ et $q < p$ (car $q \mid p-1$) ce qui est absurde car p le plus petit diviseur premier de n .

$$\text{Donc } d = 1 \text{ et } n \wedge (p-1) = 1$$

D'après le Théorème de BEZOUT il existe un couple $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que :

$$nu + (p-1)v = 1$$

b) q et r respectivement le quotient et le reste dans la division euclidienne de u par $(p-1)$.

$$\text{Donc } nu = n(p-1)q + nr \text{ et } nu + (p-1)v = 1 \Rightarrow \begin{cases} nu = n(p-1)q + nr \\ nu = 1 - (p-1)v \end{cases}$$

$$\Rightarrow n(p-1)q + nr = 1 - (p-1)v$$

$$\Rightarrow nr = 1 - (p-1)v - n(p-1)q$$

$$\Rightarrow nr = 1 - (p-1)(v + nq)$$

c) On pose, $v' = -(v + nq)$.

Montrons que : $v' \geq 0$

On a : $v' = -(v + nq) \Rightarrow nr = 1 - (p-1)v'$; supposons que $v' < 0$

$$\text{Alors } 0 \leq nr < 1 \Rightarrow nr = 0 \Rightarrow r = 0$$

$$\text{Donc } (p-1) \mid u \Rightarrow (p-1) \mid nu + (p-1)v$$

$$\Rightarrow (p-1) \mid 1$$

$$\Rightarrow p=2 \quad \text{ce qui est absurde car } p \text{ est impaire.}$$

$$\text{D'où } v' \geq 0$$

d) Montrons que l'équation (E_n) n'admet pas de solution dans $\mathbb{N}^2$

Supposons qu'il existe un couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ solution de (E_n) ; on a alors :

$$(x+1)^n \equiv x^n [p] \Rightarrow (x+1)^{nr} \equiv x^{nr} [p]$$

$$\Rightarrow (x+1)^{1+(p-1)v'} \equiv x^{1+(p-1)v'} [p]$$

$$\Rightarrow (x+1) \left((x+1)^{(p-1)} \right)^{v'} \equiv x \left(x^{(p-1)} \right)^{v'} [p]$$

$$\Rightarrow (x+1) \equiv x [p]$$

$$\Rightarrow 1 \equiv 0 [p]$$

$$\Rightarrow p \mid 1 \quad \text{ce qui est absurde car } p \text{ est premier.}$$

Donc l'équation (E_n) n'admet pas de solution dans $\mathbb{N}^2$

EXERCICE 4 (3.5 points)

On rappelle que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire non commutatif d'unité

$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et que $(\mathbb{Z}, +, \times)$ est un anneau commutatif unitaire et intègre.

$$\text{Soit } E = \left\{ M(a, b) = \begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix} \mid (a, b) \in \mathbb{Z}^2 \right\}$$

1- a) Montrons que E est un sous-groupe de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +)$

$$\text{On a : } E \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \text{ et } E \neq \emptyset \text{ car } M(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 3 \times 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in E$$

De plus pour tous éléments $M(a, b)$ et $M(a', b')$ de E ; on a :

$$\begin{aligned} \bullet \quad M(a, b) + M(a', b') &= \begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & 3b' \\ b' & a' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a+a' & 3(b+b') \\ b+b' & a+a' \end{pmatrix} \in E \quad (\text{car } (a+a', b+b') \in \mathbb{Z}^2) \end{aligned}$$

$$\bullet \quad M(a, b) - M(a', b') = \begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a' & 3b' \\ b' & a' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a-a' & 3(b-b') \\ b-b' & a-a' \end{pmatrix} \in E \text{ (car } (a-a', b-b') \in \mathbb{Z}^2 \text{)}$$

Donc E est un sous-groupe de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +)$

b) Soient $M(a, b)$ et $M(c, d)$ deux éléments de E ; on a :

$$\begin{aligned} M(a, b) \times M(c, d) &= \begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c & 3d \\ d & c \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ac + 3bd & 3ad + 3bc \\ bc + ad & 3bd + ac \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ac + 3bd & 3(ad + bc) \\ ad + bc & ac + 3bd \end{pmatrix} \\ &= M(ac + 3bd, ad + bc) \end{aligned}$$

c) Montrons que : $(E, +, \times)$ est un anneau commutatif et unitaire.

E est un sous-groupe de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$; alors $(E, +)$ est un groupe commutatif.

Et pour $M(a, b)$ et $M(c, d)$ deux éléments de E ; on a :

$$M(a, b) \times M(c, d) = M(ac + 3bd, ad + bc) \in E$$

Donc E est stable dans $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$; et comme $\times$ est associative et distributive par rapport à $+$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$; d'où $\times$ est associative et distributive par rapport à $+$ dans E .

La loi $\times$ admet $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ comme élément neutre dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$; donc $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

l'élément neutre pour $\times$ dans E .

Par suite $(E, +, \times)$ est un anneau commutatif et unitaire.

2- Soit φ l'application définie de E vers $\mathbb{Z}$ par : $(\forall (a, b) \in \mathbb{Z}^2) ; \varphi(M(a, b)) = |a^2 - 3b^2|$

Montrons que : φ est un homomorphisme de $(E, \times)$ vers $(\mathbb{Z}, \times)$

$M(a, b)$ et $M(c, d)$ deux éléments de E ; on a :

$$\begin{aligned} \varphi(M(a, b) \times M(c, d)) &= \varphi(M(ac + 3bd, ad + bc)) \\ &= |(ac + 3bd)^2 - 3(ad + bc)^2| \end{aligned}$$

$$= |(ac)^2 + 6bdac + 9(bd)^2 - 3(ad)^2 - 6bdac - 3(bc)^2|$$

$$= |(ac)^2 + 9(bd)^2 - 3(ad)^2 - 3(bc)^2|$$

$$\begin{aligned} \text{Et } \varphi(M(a,b)) \times \varphi(M(c,d)) &= |a^2 - 3b^2| \times |c^2 - 3d^2| \\ &= |(a^2 - 3b^2)(c^2 - 3d^2)| \\ &= |((ac)^2 + 9(bd)^2 - 3(ad)^2 - 3(bc)^2)| \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \varphi(M(a,b) \times M(c,d)) = \varphi(M(a,b)) \times \varphi(M(c,d))$$

D'où φ est un homomorphisme de $(E, \times)$ vers $(\mathbb{Z}, \times)$

3- Soit $M(a,b) \in E$

$$\begin{aligned} \text{a) D'après la question 1-b) On a : } M(a,b) \times M(a,-b) &= M(a^2 - 3b^2, ab - ba) \\ &= M(a^2 - 3b^2, 0) \\ &= (a^2 - 3b^2) \times M(1,0) \\ &= (a^2 - 3b^2)I \end{aligned}$$

b) Montrer que : si $M(a,b)$ est inversible dans $(E, \times)$ alors $\varphi(M(a,b)) = 1$

Supposons que $M(a,b)$ est inversible dans $(E, \times)$ alors $\varphi(M(a,b))$ est inversible dans $(\mathbb{Z}, \times)$; or les seuls éléments inversibles dans $(\mathbb{Z}, \times)$ sont 1 et -1 ; d'où :

$$\varphi(M(a,b)) = -1 \text{ ou } \varphi(M(a,b)) = 1$$

Et comme $\varphi(M(a,b))$ est positif alors $\varphi(M(a,b)) = 1$.

c) On suppose que $\varphi(M(a,b)) = 1$.

Montrons que : $M(a,b)$ est inversible dans $(E, \times)$ et précisons son inverse.

$$\text{On a : } \varphi(M(a,b)) = 1 \Rightarrow |a^2 - 3b^2| = 1$$

$$\Rightarrow a^2 - 3b^2 = 1 \text{ ou } a^2 - 3b^2 = -1$$

- supposons $a^2 - 3b^2 = 1$

Donc $M(a,b) \times M(a,-b) = I$ et $\times$ est commutative dans $(E, \times)$

D'où $M(a,b)$ est inversible dans $(E, \times)$ et son inverse est $M^{-1}(a,b) = M(a,-b)$

- supposons $a^2 - 3b^2 = -1$

Donc $M(a,b) \times M(a,-b) = -I \Rightarrow M(a,b) \times (-M(a,-b)) = I$ et $\times$ est commutative dans $(E, \times)$

D'où $M(a,b)$ est inversible dans $(E, \times)$ et son inverse est

$$M^{-1}(a,b) = -M(a,-b) = M(-a,b)$$

4- a) Montrer que : $(\forall (a,b) \in \mathbb{Z}^2); \varphi(M(a,b)) = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$

$$\text{On a : } \varphi(M(a,b)) = 0 \Leftrightarrow |a^2 - 3b^2| = 0$$

$$\Leftrightarrow (a - \sqrt{3}b)(a + \sqrt{3}b) = 0$$

$$\Leftrightarrow a - \sqrt{3}b = 0 \quad \text{ou} \quad a + \sqrt{3}b = 0$$

$$\Leftrightarrow a = b = 0 \quad (\text{car } \sqrt{3} \notin \mathbb{Q})$$

b) Soient $M(a,b)$ et $M(c,d)$ deux éléments de E ; on a :

$$M(a,b) \times M(c,d) = M(0,0) \Leftrightarrow \varphi(M(a,b) \times M(c,d)) = \varphi(M(0,0))$$

$$\Leftrightarrow \varphi(M(a,b)) \times \varphi(M(c,d)) = 0$$

$$\Leftrightarrow \varphi(M(a,b)) = 0 \quad \text{ou} \quad \varphi(M(c,d)) = 0$$

$$\Leftrightarrow a = b = 0 \quad \text{ou} \quad c = d = 0$$

$$\Leftrightarrow M(a,b) = M(0,0) \quad \text{ou} \quad M(c,d) = M(0,0)$$

Donc $(E, +, \times)$ est un anneau intègre.

c) On a : $\varphi(M(3,0)) = 9 \neq 1$; donc $M(3,0)$ n'est pas inversible dans $(E, \times)$

D'où $(E, +, \times)$ n'est pas un corps.