

guessmaths

Correction examen nationale 2012 Session de Rattrapage

2ème Bac SM A et B

Exercice 1 :

I- 1) Soient x et y deux éléments de $I = [1, +\infty[$;

Donc $x \geq 1$ et $y \geq 1$

D'où $\sqrt{x} \geq 1$ et $\sqrt{y} \geq 1$

Alors $(\sqrt{x} + \sqrt{y} - 1)^2 \geq 1$

Par suite $x \perp y \in [1, +\infty[$

On en conclut que $\perp$ est une loi de composition interne dans I .

2) • Soient x et y deux éléments de I

$$\begin{aligned} \text{On a : } x \perp y &= (\sqrt{x} + \sqrt{y} - 1)^2 \\ &= (\sqrt{y} + \sqrt{x} - 1)^2 \\ &= y \perp x \end{aligned}$$

Donc la loi $\perp$ est une loi commutative dans I .

3) • Soient x ; y et z trois éléments de I

$$\begin{aligned} \text{On a : } (x \perp y) \perp z &= (\sqrt{x \perp y} + \sqrt{z} - 1)^2 \\ &= \left(\sqrt{(\sqrt{x} + \sqrt{y} - 1)^2} + \sqrt{z} - 1 \right)^2 \\ &= (\sqrt{x} + \sqrt{y} - 1 + \sqrt{z} - 1)^2 \\ &= \left(\sqrt{x} + \sqrt{(\sqrt{y} + \sqrt{z} - 1)^2} - 1 \right)^2 \\ &= (\sqrt{x} + \sqrt{y \perp z} - 1)^2 \\ &= x \perp (y \perp z) \end{aligned}$$

Donc la loi $\perp$ est une loi associative dans I .

3) Soit e l'élément neutre pour $\perp$ dans I .

$$\begin{aligned} \text{Alors } x \in I \text{ on a : } x \perp e &= e \perp x = x \Leftrightarrow (\sqrt{x} + \sqrt{e} - 1)^2 = x \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x} + \sqrt{e} - 1 = \pm \sqrt{x} \end{aligned}$$

$$\text{1er Cas } \sqrt{x} + \sqrt{e} - 1 = -\sqrt{x} \Rightarrow e = (1 - 2\sqrt{x})^2$$

Dans ce cas $e \notin I$ car pour $x > 0$ on a : $(1 - 2\sqrt{x})^2 < 1$

$$\text{2ème Cas } \sqrt{x} + \sqrt{e} - 1 = \sqrt{x} \Rightarrow e = 1$$

$\exists 1 \in I$; et comme l'élément neutre s'il existe alors il est unique.

Donc 1 est l'élément neutre pour la loi $\perp$ dans $\mathcal{I}$.

II- $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire. $E = \left\{ M(x) = \begin{pmatrix} x & 2(x-1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} / x \in \mathbb{R}^* \right\}$

1) Soient $M(a)$ et $M(b)$ deux matrices de E ; on a :

$$\begin{aligned} M(a) \times M(b) &= \begin{pmatrix} a & 2(a-1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b & 2(b-1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ab & 2(ab-1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= M(ab) \in E \end{aligned}$$

Donc E est une partie stable de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$

2) On considère l'application : $\varphi : \mathbb{R}^* \rightarrow E$
 $x \mapsto M(x)$

$$\begin{aligned} \text{a) Soient } x \text{ et } y \text{ deux réels de } \mathbb{R}^* ; \text{ on a : } \varphi(x \times y) &= M(x \times y) \\ &= M(x) \times M(y) \\ &= \varphi(x) \times \varphi(y) \end{aligned}$$

Donc φ est un homomorphisme de $(\mathbb{R}^*, \times)$ vers $(E, \times)$

Soit $M(y)$ un élément de $(E, \times)$; résolvons l'équation d'inconnue $x : M(y) = \varphi(x)$

On a : $M(y) = \varphi(x) \Leftrightarrow M(x) = M(y)$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x & 2(x-1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} y & 2(y-1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow x &= y \end{aligned}$$

Donc l'équation $M(y) = \varphi(x)$ admet une solution unique dans $\mathbb{R}^* x = y$; d'où

φ est un isomorphisme de $(\mathbb{R}^*, \times)$ vers $(E, \times)$.

b) On sait qu'un isomorphisme conserve les structures ; on déduit que $(E, \times)$ est un

groupe commutatif d'élément neutre $\varphi(1) = M(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et toute matrice

$M(x)$ de E admet un inverse $\varphi\left(\frac{1}{x}\right) = M\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & 2\left(\frac{1}{x}-1\right) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; à partir de la

structure de $(\mathbb{R}^*, \times)$.

$$\begin{aligned} \text{c) Soit } H_n \text{ une matrice de } \mathcal{H} ; \text{ on a : } H_n &= \begin{pmatrix} 2^n & 2^{n+1}-2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^n & 2(2^n-1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} x & 2(x-1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ = M(x) \quad \text{où } x = 2^n$$

Donc $\mathcal{E} \subset E$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{E}$; alors $\mathcal{E} \neq \emptyset$

Soient $H_n = \begin{pmatrix} 2^n & 2^{n+1}-2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $H_m = \begin{pmatrix} 2^m & 2^{m+1}-2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ deux matrices de $\mathcal{E}$

$$\text{On a : } H_n \times H_m^{-1} = M(2^n) \times M^{-1}(2^m)$$

$$= M(2^n) \times M\left(\frac{1}{2^m}\right)$$

$$= M\left(\frac{2^n}{2^m}\right)$$

$$= M(2^{n-m})$$

$$= \begin{pmatrix} 2^{n-m} & 2(2^{n-m}-1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2^{n-m} & 2^{n-m+1}-2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= H_{n-m} \in \mathcal{E}$$

Donc $\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} 2^n & 2^{n+1}-2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} / n \in \mathbb{N} \right\}$ est un sous-groupe de $(E, \times)$

Exercice 2 :

$$I- (E) : z^2 - 4\left(1 + \frac{2}{3}i\right)z + \frac{5}{3} + 4i = 0$$

1) a) On vérifie par le calcul direct que le nombre $z_1 = 1 + \frac{2}{3}i$ est une solution de l'équation (E)

b) On utilise la relation entre les deux solutions d'une équation de deuxième degré qui

$$\text{est } z_1 \times z_2 = \frac{c}{a} ; \text{ on obtient : } z_1 \times z_2 = \frac{5}{3} + 4i \Leftrightarrow z_2 = \frac{\frac{5}{3} + 4i}{1 + \frac{2}{3}i} \\ \Leftrightarrow z_2 = \frac{5 + 12i}{3 + 2i}$$

$$\Leftrightarrow z_2 = \frac{(5+12i)(3-2i)}{13}$$

$$\Leftrightarrow z_2 = \frac{15+24+36i-10i}{13}$$

$$\Leftrightarrow z_2 = \frac{39+26i}{13}$$

$$\Leftrightarrow z_2 = 3+2i$$

$$\Leftrightarrow z_2 = 3\left(1+\frac{2}{3}i\right)$$

$$\Leftrightarrow z_2 = 3z_1$$

Donc la deuxième solution de l'équation (E) est $z_2 = 3z_1$

2) On a : $\arg(z_1) \equiv \theta[2\pi]$

$z_1 = 1 + \frac{2}{3}i$ est solution de l'équation (E) ; donc

$$z_1^2 - 4\left(1 + \frac{2}{3}i\right)z_1 + \frac{5}{3} + 4i = 0 \Leftrightarrow z_1^2 - 4z_1^2 + \frac{5}{3} + 4i = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{3} + 4i = 3z_1^2$$

$$\Leftrightarrow \arg\left(\frac{5}{3} + 4i\right) \equiv 2\arg(z_1)[2\pi]$$

$$\Leftrightarrow \arg\left(\frac{5}{3} + 4i\right) \equiv 2\theta[2\pi]$$

$$\text{Et } \left|\frac{5}{3} + 4i\right| = \sqrt{\left(\frac{5}{3}\right)^2 + 4^2} = \frac{13}{3}$$

$$\text{D'où } \frac{5}{3} + 4i = \frac{13}{3}e^{2i\theta}$$

II- On considère les points A, B et Ω dont les affixes sont respectivement a, b et ω .

Soit r la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{3}$; on pose : $P = r(A)$ et $B = r(Q)$

Et p l'affixe du point P ; q l'affixe du point Q.

$$1) a) \text{ On a : } \bullet P = r(A) \Leftrightarrow (p - \omega) = e^{i\frac{\pi}{3}}(a - \omega)$$

$$\Leftrightarrow p = e^{i\frac{\pi}{3}}(a - \omega) + \omega \quad [1]$$

$$\bullet B = r(Q) \Leftrightarrow (b - \omega) = e^{i\frac{\pi}{3}}(q - \omega)$$

$$\Leftrightarrow qe^{i\frac{\pi}{3}} = (b - \omega) + \omega e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$\Leftrightarrow q = e^{-i\frac{\pi}{3}}(b - \omega) + \omega \quad [2]$$

$$\begin{aligned}
 b) \text{ On a : } \frac{1 - e^{i\frac{\pi}{3}}}{1 - e^{-i\frac{\pi}{3}}} &= \frac{e^{i\frac{\pi}{6}} \left(e^{-i\frac{\pi}{6}} - e^{i\frac{\pi}{6}} \right)}{e^{-i\frac{\pi}{6}} \left(e^{i\frac{\pi}{6}} - e^{-i\frac{\pi}{6}} \right)} \\
 &= e^{i\frac{\pi}{3}} \times \frac{-2i \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)}{2i \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)} \\
 &= -e^{i\frac{\pi}{3}} \\
 &= e^{i\left(\frac{\pi}{3} + \pi\right)} \\
 &= e^{i\frac{4\pi}{3}}
 \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \frac{1 - e^{i\frac{\pi}{3}}}{1 - e^{-i\frac{\pi}{3}}} = e^{i\frac{4\pi}{3}}$$

$$c) \text{ On a d'après question 1)a) } \boxed{1} \quad p = e^{i\frac{\pi}{3}}(a - \omega) + \omega$$

$$\begin{aligned}
 \text{Donc } p - a &= e^{i\frac{\pi}{3}}(a - \omega) + \omega - a \\
 &= \left(e^{i\frac{\pi}{3}} - 1 \right) (a - \omega)
 \end{aligned}$$

$$\text{Et } \boxed{2} \quad q = e^{-i\frac{\pi}{3}}(b - \omega) + \omega$$

$$\begin{aligned}
 \text{Donc } q - b &= e^{-i\frac{\pi}{3}}(b - \omega) + \omega - b \\
 &= \left(e^{-i\frac{\pi}{3}} - 1 \right) (b - \omega)
 \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } \frac{p - a}{q - b} = \frac{\left(e^{i\frac{\pi}{3}} - 1 \right) (a - \omega)}{\left(e^{-i\frac{\pi}{3}} - 1 \right) (b - \omega)}.$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\omega - a}{\omega - b} \times \frac{1 - e^{i\frac{\pi}{3}}}{1 - e^{-i\frac{\pi}{3}}} \\
 &= \frac{\omega - a}{\omega - b} \times e^{i\frac{4\pi}{3}}
 \end{aligned}$$

$$\text{D'où } \frac{p - a}{q - b} = \left(\frac{\omega - a}{\omega - b} \right) e^{i\frac{4\pi}{3}}$$

2- On suppose que : $\frac{\omega - a}{\omega - b} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$

$$a) \frac{\omega - a}{\omega - b} = e^{i\frac{2\pi}{3}} \text{ et } \frac{p - a}{q - b} = \left(\frac{\omega - a}{\omega - b} \right) e^{i\frac{4\pi}{3}} ; \text{ donc } \frac{p - a}{q - b} = e^{i\frac{2\pi}{3}} e^{i\frac{4\pi}{3}} = e^{2i\pi} \in \mathbb{R}$$

$$\text{Donc } \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{BQ}$$

D'où le quadrilatère APQB est un parallélogramme.

$$b) \text{ On a : } \boxed{1} \quad p - a = e^{i\frac{\pi}{3}}(a - \omega) + \omega - a$$

$$p - a = \left(1 - e^{i\frac{\pi}{3}} \right) (\omega - a) \quad \boxed{4}$$

$$\text{Et d'après la supposition } \frac{\omega - a}{\omega - b} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

$$\text{Donc } \omega - b = (\omega - a) e^{-i\frac{2\pi}{3}} \quad \boxed{5}$$

$$\text{D'autre part on a : } b - a = \omega - a - (\omega - b)$$

$$\begin{aligned} \text{En utilisant la relation } \boxed{5} \text{ on obtient : } b - a &= (\omega - a) - (\omega - a) e^{-i\frac{2\pi}{3}} \\ &= \left(1 - e^{-i\frac{2\pi}{3}} \right) (\omega - a) \end{aligned}$$

$$\text{Donc } b - a = (\omega - a) \left(1 - e^{-i\frac{2\pi}{3}} \right) \quad \boxed{6}$$

$$\begin{aligned} \text{De } \boxed{4} \text{ et } \boxed{6} \text{ on déduit que : } \frac{b - a}{p - a} &= \frac{\left(1 - e^{-i\frac{2\pi}{3}} \right) (\omega - a)}{\left(1 - e^{i\frac{\pi}{3}} \right) (\omega - a)} \\ &= \frac{e^{-i\frac{\pi}{3}} \left(e^{i\frac{\pi}{3}} - e^{-i\frac{\pi}{3}} \right)}{e^{i\frac{\pi}{6}} \left(e^{-i\frac{\pi}{6}} - e^{i\frac{\pi}{6}} \right)} \\ &= \frac{2i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}{-2i \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)} e^{-i\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right)} \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{1} e^{-i\frac{\pi}{2}} \\ &= i\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \frac{b-a}{p-a} = i\sqrt{3}$$

$$\text{D'où } \arg\left(\frac{b-a}{p-a}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \Leftrightarrow (\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AB}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$$

Donc l'angle (PAB) est droit ; et comme le quadrilatère $APQB$ est un parallélogramme alors $APQB$ est un rectangle.

Exercice 3 :

1- a) les nombres premiers dont les carrés sont inférieures à 503 sont :

2;3;5;7 : 11;13;17;19 et aucun de ces nombres ne divise 503 ; par conséquent 503 est un nombre premier.

b) Comme 503 et 7 sont deux nombres premiers ; d'après le Théorème de FERMAT :

$$7^{503-1} \equiv 1[503] \Rightarrow 7^{502} \equiv 1[503]$$

$$\text{Par suite } (7^{502})^4 \equiv 1^4[503] \Rightarrow 7^{2008} \equiv 1[503]$$

2- dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $(E) : 49x - 6y = 1$

le couple $(1;8)$ est une solution particulière de (E) ; résolvons dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E) .

Et soit le couple $(x;y)$ de $\mathbb{Z}^2$ solution de (E) ; on a alors :

$$\begin{cases} 49 \times 1 - 6 \times 8 = 1 \\ 49x - 6y = 1 \end{cases} \Rightarrow 49(x-1) - 6(y-8) = 0$$

$$\Rightarrow 49(x-1) = 6(y-8) \quad \langle * \rangle$$

$$\Rightarrow 49 \mid 6(y-8)$$

Sachant que $49 \wedge 6 = 1$; alors d'après Gauss ; on a : $49 \mid (y-8) \Rightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}) / y-8 = 49k$
 $\Rightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}) / y = 8 + 49k$

Et en remplaçant y dans $\langle * \rangle$ on obtient $49(x-1) = 6(8 + 49k - 8) \Rightarrow x-1 = 6k$
 $\Rightarrow x = 1 + 6k$

Réciproquement $49(1 + 6k) - 6(8 + 49k) = 1$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation (E) est $S = \{(1 + 6k, 8 + 49k) / k \in \mathbb{Z}\}$

3- On pose : $N = 1 + 7 + 7^2 + \dots + 7^{2007}$

a) On sait que si $u_n = 7^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est une suite géométrique de raison 7 et

$$\begin{aligned} \text{que } 1 + 7 + 7^2 + \dots + 7^{2007} &= \frac{7^{2007+1} - 1}{7 - 1} \\ &= \frac{7^{2008} - 1}{6} \end{aligned}$$

$$\text{D'où } N = \frac{7^{2008} - 1}{6} \Rightarrow 7^{2008} - 6N = 1$$

$$\Rightarrow 7^2 \times 7^{2006} - 6 \times N = 1$$

$$\Rightarrow 49 \times 7^{2006} - 6 \times N = 1$$

Donc le couple $(7^{2006}; N)$ est solution de l'équation (E).

$$b) \text{ On a : } \begin{cases} 1 \equiv 1[4] \\ 7 \equiv -1[4] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7^2 \equiv 1[4] \\ 7^3 \equiv -1[4] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 7^4 \equiv 1[4] \\ 7^5 \equiv -1[4] \\ \vdots \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 7^{2006} \equiv 1[4] \\ 7^{2007} \equiv -1[4] \end{cases}$$

En sommant les membres de ces congruences on obtient :

$$1 + 7 + 7^2 + \dots + 7^{2007} \equiv 0[4] \Leftrightarrow N \equiv 0[4]$$

D'après la question 1)b) on a : $7^{2008} \equiv 1[503]$; donc $503 \mid 7^{2008} - 1$

Et on sait que $6N = (7^{2008} - 1)$

Donc $503 \mid 6N$; de plus on a : $503 \wedge 6 = 1$

Alors d'après GAUSS $503 \mid N \Rightarrow N \equiv 0[503]$

c) On a $503 \wedge 4 = 1$ car 503 est un nombre premier et (2×2) est la décomposition en nombres premiers de 4 et $2 \nmid 503$

On sait que : $4 \mid N$ et $503 \mid N$; donc $4 \times 503 \mid N$

D'où N est divisible par 2012.

Exercice 4 : (7.5 points)

I- Pour tout $x \in [0, +\infty[: g(x) = \ln(1+x) - \frac{x}{1+x}$

1) Etudier les variations de g sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

$$\begin{aligned}\text{On a pour tout } x \in [0, +\infty[: g'(x) &= \frac{1}{1+x} - \frac{(1+x) - x}{(1+x)^2} \\ &= \frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2} \\ &= \frac{1+x-1}{(1+x)^2} \\ &= \frac{x}{(1+x)^2}\end{aligned}$$

$$\text{Donc } (\forall x \in [0, +\infty[) : g'(x) = \frac{x}{(1+x)^2}$$

$$\text{Donc } (\forall x \in [0, +\infty[) : g'(x) \geq 0$$

D'où g est croissante sur $[0, +\infty[$

2) Soit $x \in [0, +\infty[$; alors $x \geq 0 \Rightarrow g(x) \geq g(0)$ (car g est croissante sur $[0, +\infty[$)

$$\text{Et } g(0) = 0 ; \text{ Donc } (\forall x \in [0, +\infty[) : g(x) \geq 0$$

II- Soit la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^x \ln(1 + e^{-x})$

1) On a : • $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \ln(1 + e^{-x})$; on pose $t = e^x$; $x \rightarrow -\infty$ alors $t \rightarrow 0$

$$\begin{aligned}e^x \ln(1 + e^{-x}) &= e^x \ln(e^{-x} (1 + e^x)) \\ &= e^x \ln(e^{-x}) + e^x \ln(1 + e^x) \\ &= -xe^x + e^x \ln(1 + e^x)\end{aligned}$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-xe^x + e^x \ln(1 + e^x)) = 0$$

$$(\text{car } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0)$$

$$\text{D'où } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \ln(1 + e^{-x})$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + e^{-x})}{e^{-x}} ; \text{ on pose } t = e^{-x} ; x \rightarrow +\infty \text{ alors } t \rightarrow 0$$

$$\text{Alors } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + e^{-x})}{e^{-x}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + t)}{t} = 1$$

Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$

$$\begin{aligned} 2) \text{ Soit } x \in \mathbb{R} ; \text{ on a : } f'(x) &= e^x \ln(1 + e^{-x}) + e^x \times \frac{(1 + e^{-x})'}{1 + e^{-x}} \\ &= e^x \ln(1 + e^{-x}) + e^x \times \frac{-e^{-x}}{1 + e^{-x}} \\ &= e^x \left(\ln(1 + e^{-x}) - \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}} \right) \\ &= e^x g(e^{-x}) \end{aligned}$$

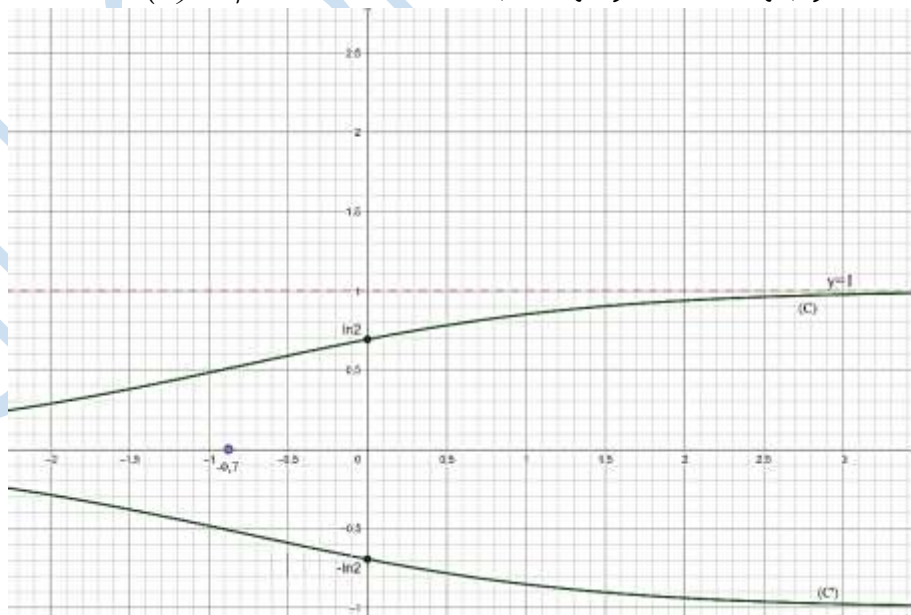
Donc $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f'(x) = e^x g(e^{-x})$

$$\begin{aligned} 3) \text{ On a } (\forall x \in \mathbb{R}) ; \begin{cases} e^x > 0 \\ e^{-x} > 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} e^x > 0 \\ g(e^{-x}) > 0 \end{cases} \\ &\Rightarrow e^x g(e^{-x}) > 0 \\ &\Rightarrow f'(x) > 0 \end{aligned}$$

D'où le tableau de variations de f .

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	0	1

4) Construire la courbe (C) représentative de f et (C') celle de $(-f)$



$$5) \text{ Pour tout } x \in]-1, 0[; \text{ on a : } -1 < x < 0 \Rightarrow \begin{cases} 0 < e^x < 1 \\ 0 < e^{-x} < e \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 < e^x < 1 \\ 0 < g(e^{-x}) < g(e) \end{cases}$$

$$\Rightarrow 0 < e^x g(e^{-x}) < g(e)$$

Donc $(\forall x \in]-1, 0[) ; 0 < f'(x) \leq g(e)$

6) On considère la fonction h définie pour tout $x \in \mathbb{R}$; par : $h(x) = f(x) + x$

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$: $h'(x) = f'(x) + 1$

Donc $(\forall x \in \mathbb{R}) ; h'(x) > 1 > 0$; car $f'(x) > 0$

D'où h est une bijection de $[-1, 0]$ vers $h([-1, 0]) = [h(-1), h(0)]$

$$= [f(-1) - 1, f(0)]$$

$$= [f(-1) - 1, \ln 2]$$

Et $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f(x) < 1$

Donc $f(-1) - 1 < 0$; d'où $0 \in [f(-1) - 1, \ln 2]$

Alors d'après TVI l'équation $h(x) = 0$ c-à-d $f(x) + x = 0$ admet une unique solution α dans $]-1, 0[$

$$7) (u_n)_{n \in \mathbb{N}} : \begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

a) Montrons par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; -1 \leq u_n \leq 0$

Pour $n = 0$

On a : $u_0 = 0$; donc $-1 \leq u_0 \leq 0$

Soit $n \in \mathbb{N}$

Supposons que $-1 \leq u_n \leq 0$ et montrons que $-1 \leq u_{n+1} \leq 0$

$$u_n \leq 0 \Rightarrow f(u_n) \leq f(0)$$

$$\Rightarrow -f(u_n) \geq -f(0)$$

$$\Rightarrow u_{n+1} \geq -\ln 2 \geq -1$$

D'après la partie II- on a : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f(x) \geq 0$

$$f(u_n) \geq 0 \Rightarrow -f(u_n) \leq 0$$

$$\Rightarrow u_{n+1} \leq 0$$

Donc $-1 \leq u_{n+1} \leq 0$

Conclusion : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; -1 \leq u_n \leq 0$

b) f est continue dérivable sur $\mathbb{R}$; en appliquant le théorème des Accroissements Finis sur l'intervalle de bornes u_n et α ; selon l'ordre de u_n et α dans $\mathbb{R}$; qu'on

notera $\overline{\alpha; u_n}$; alors :

$$\left(\exists c \in \overline{] \alpha; u_n[} \right) / \frac{f(u_n) - f(\alpha)}{u_n - \alpha} = f'(c)$$

$$\left(\exists c \in \overline{] \alpha; u_n[} \right) / |f(u_n) - f(\alpha)| = |f'(c)(u_n - \alpha)|$$

$$\left(\exists c \in \overline{] \alpha; u_n[} \right) / |-u_{n+1} + \alpha| = f'(c)|u_n - \alpha| \quad (\text{car } f'(c) \geq 0)$$

$$\left(\exists c \in \overline{] \alpha; u_n[} \right) / |u_{n+1} - \alpha| = f'(c)|u_n - \alpha|$$

Et comme $(\forall x \in]-1, 0[) ; 0 < f'(x) \leq g(e)$ et $(c \in]-1, 0[)$ (car $\overline{] \alpha; u_n[} \subset]-1, 0[)$)

Alors $0 < f'(c) \leq g(e)$

$$\text{D'où } |u_{n+1} - \alpha| \leq g(e)|u_n - \alpha|$$

$$\text{Donc : } (\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_{n+1} - \alpha| \leq g(e)|u_n - \alpha|$$

c) On a d'après la question précédente : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_{n+1} - \alpha| \leq g(e)|u_n - \alpha|$; donc :

$$|u_n - \alpha| \leq g(e)|u_{n-1} - \alpha|$$

$$|u_{n-1} - \alpha| \leq g(e)|u_{n-2} - \alpha|$$

$$|u_{n-2} - \alpha| \leq g(e)|u_{n-3} - \alpha|$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$|u_1 - \alpha| \leq g(e)|u_0 - \alpha|$$

Donc on multipliant les membres des inégalités ; on obtient : $|u_n - \alpha| \leq (g(e))^n |\alpha|$

Et comme $-1 < \alpha < 0 \Rightarrow |\alpha| < 1$

$$\text{D'où } (\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_n - \alpha| \leq (g(e))^n$$

d) Sachant que $g(e) < 0,6$; alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} (g(e))^n = 0$ (car $-1 < 0 \leq g(e) < 0,6 < 1$)

d'où par encadrement on $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n - \alpha| = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha$

Exercice 5 : (2.5 points)

On considère la fonction numérique définie sur $]0, +\infty[$ par : $F(x) = \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{\ln t}{1+t^2} dt$

$$1) \text{ On a : } F(1) = \int_1^1 \frac{\ln t}{1+t^2} dt = 0$$

2) a) On a la fonction $t \mapsto \frac{\ln t}{1+t^2}$ est continue sur $]0, +\infty[$; donc elle admet une primitive ψ sur $]0, +\infty[$ telle que :

$$\psi(x) - \psi(0) = \int_0^x \left(\frac{\ln t}{1+t^2} \right) dt \text{ et } \psi'(x) = \frac{\ln x}{1+x^2}$$

Et on a : $F(x) = \psi(x) - \psi\left(\frac{1}{x}\right)$; donc F est dérivable sur $]0, +\infty[$ comme somme et composée de fonction dérivables sur $]0, +\infty[$; pour tout $x \in]0, +\infty[$; on a :

$$\begin{aligned} F'(x) &= \psi'(x) - \left(\frac{1}{x}\right)' \psi'\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= \frac{\ln x}{1+x^2} + \frac{1}{x^2} \times \frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \\ &= \frac{\ln x}{1+x^2} + \frac{1}{x^2} \times \frac{-\ln(x)}{\frac{1+x^2}{x^2}} \\ &= \frac{\ln x}{1+x^2} - \frac{\ln(x)}{1+x^2} = 0 \end{aligned}$$

Donc $(\forall x \in]0, +\infty[) ; F'(x) = 0$

b) On a : $(\forall x \in]0, +\infty[) ; F'(x) = 0$; F est constante sur $]0, +\infty[$ et $F(1) = 0$

Donc $(\forall x \in]0, +\infty[) ; F(x) = 0$

3) pour tout $x \in]0, +\infty[$; on a : $F(x) = \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{\ln t}{1+t^2} dt$

$$\text{On pose : } \begin{cases} u(t) = \ln t & u'(t) = \frac{1}{t} \\ v'(t) = \frac{1}{1+t^2} & v(t) = \text{Arctan}(t) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } F(x) &= \left[\ln t \times \text{Arctan}(t) \right]_{\frac{1}{x}}^x - \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{\text{Arctan}(t)}{t} dt \\ &= \ln x \times \text{Arctan}(x) - \ln \frac{1}{x} \times \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) - \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{\text{Arctan}(t)}{t} dt \\ &= \ln x \times \text{Arctan}(x) + \ln x \times \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) - \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{\text{Arctan}(t)}{t} dt \\ &= \left(\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) \right) \ln x - \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{\text{Arctan}(t)}{t} dt \end{aligned}$$

$$\text{Donc } (\forall x \in]0, +\infty[) ; F(x) = \left(\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) \right) \ln x - \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{\text{Arctan}(t)}{t} dt$$

4) On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $\varphi(x) = \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)$

φ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et sur $]-\infty, 0[$ comme somme et composée de fonction usuelles ;

$$\begin{aligned} \text{et pour tout } x \in \mathbb{R}^* \text{ on a : } \varphi'(x) &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} \\ &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2} \times \frac{1}{\frac{1+x^2}{x^2}} \\ &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0 \end{aligned}$$

Donc la fonction φ est constante sur chacun des intervalles $]0, +\infty[$ et $]-\infty, 0[$; alors :

$$\begin{cases} \forall x \in]-\infty, 0[& \varphi(x) = c_1 \\ \forall x \in]0, +\infty[& \varphi(x) = c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = \varphi(-1) = 2\text{Arctan}(-1) = -\frac{\pi}{2} \\ c_2 = \varphi(1) = 2\text{Arctan}(1) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\text{D'où } \begin{cases} \forall x \in]-\infty, 0[& \varphi(x) = -\frac{\pi}{2} \\ \forall x \in]0, +\infty[& \varphi(x) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\text{Par suite : } (\forall x > 0) ; \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} - \text{Arctan}(x)$$

5) D'après la question 2)b) on a : $(\forall x \in]0, +\infty[) ; F(x) = 0$

$$\text{Donc } \left(\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) \right) \ln x - \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{\text{Arctan}(t)}{t} dt = 0$$

$$\text{D'où } \ln x = \frac{1}{\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)} \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{\text{Arctan}(t)}{t} dt = 0$$

$$\text{D'autre part } (\forall x \in]0, +\infty[) ; \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Par suite : } (\forall x > 0) ; \ln x = \frac{2}{\pi} \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{\text{Arctan}(t)}{t} dt$$