Exercice 23

On considère la fonction numérique f définie sur IR par: $f(x)=\dfrac{e^x}{1+e^x}$ *et* (C) *sa courbe représentative dans un repère orthonormé* $(O;\vec{i};\vec{j})$

1- a. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

b. Interpréter géométriquement les deux résultats trouvés.

2 a. Montrer que : $f'(x)=\dfrac{e^x}{(1+e^x)^2}$ *pour tout x de IR.*

b. Dresser le tableau de variations de f.

3- a. Montrer que le point $I\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$ *est un centre de symétrie de la courbe* (C)

b. Déterminer une équation de la tangente (T) *à la courbe* (C) *au point I.*

c. Tracer dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$, *la tangente* (T) *et la courbe* (C).

4 a. Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} *définie sur l'intervalle* $]0;1[$.

b. Montrer que : $f^{-1}(x)=\ln\left(\dfrac{x}{1-x}\right)$ *pour tout x de* $]0;1[$

Solution

$$f(x)=\frac{e^x}{1+e^x}$$

1) a. Calculons: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ *Soit* $x\in IR$ *, on a:* $f(x)=\dfrac{e^x}{1+e^x}=\dfrac{1}{\dfrac{1}{e^x}+1}$

Alors : ■ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\dfrac{1}{e^x}+1}=1$ *(Car* $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^x}=0$*)*

: ■ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x}{1+e^x}=0$ *(Car* $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$*)*

D'où: $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1}$ *et* $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0}$

b. Interprétation géométrique:

■ *On a* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ *Donc la droite d'équation* $y=1$ *est une asymptote horizontale à* (C) *au voisinage de* $+\infty$

■*Et on a :* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ *donc, la droite d'équation* $y=1$ *est une asymptote horizontale à* (C) *au voisinage de* $-\infty$.

2) a. Montrons que: $(\forall x\in IR)\quad f'(x)=\dfrac{e^x}{(1+e^x)^2}$

Les fonctions $x\mapsto e^x$ *et* $x\mapsto 1+e^x$ *sont dérivables sur* $\mathbb{R}$ *, donc f est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *, et on a :*

Soit $x \in IR$, $\boldsymbol{f'(x)} = \left(\dfrac{\boldsymbol{e^x}}{1+\boldsymbol{e^x}}\right)'$

$$= \frac{\boldsymbol{e^x} \times (1+\boldsymbol{e^x}) - \boldsymbol{e^x} \times \boldsymbol{e^x}}{(1+\boldsymbol{e^x})^2} = \frac{\boldsymbol{e^x}}{(1+\boldsymbol{e^x})^2}$$

Donc: $(\forall x \in IR)$ $\boxed{\boldsymbol{f'(x)} = \dfrac{\boldsymbol{e^x}}{(1+\boldsymbol{e^x})^2}}$

b. Tableau de variations de f

On a : $\boldsymbol{e^x} > 0$ *et* $(\boldsymbol{e^x}+1)^2 > 0$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$, *donc:* $f'(x) > 0$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$, *d'où f est strictement croissante sur* $\mathbb{R}$.

D'où le tableau de variations de f est le suivant

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$0 \nearrow 1$

3) a. Montrons que le point $I\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$ *est un centre de symétrie de (C):*

On a : $(\forall x \in IR);(-x \in IR)$ *et*

$$f(-x) = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} = \frac{1}{e^x+1}$$

$$= \frac{e^x+1-e^x}{e^x+1} = 1 - \frac{e^x}{e^x+1}$$

$$= 1 - f(x)$$

Donc : $(\forall x \in IR)$ $\boxed{f(-x) = 1 - f(x)}$

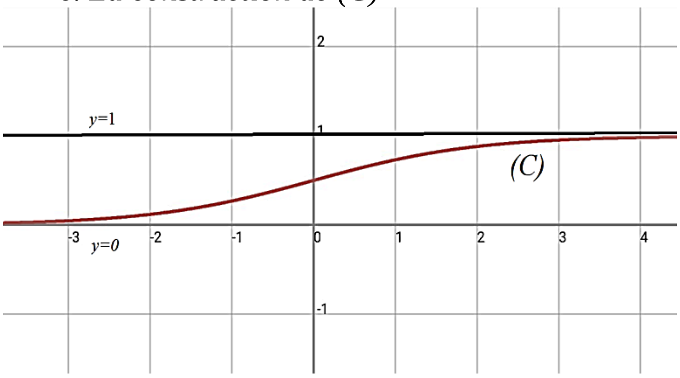
D'ou le point $I\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$ *est un centre de symétrie de la courbe (C).*

b. Déterminons une équation de la tangente (T) au point I: On a : $f(0) = \dfrac{1}{2}$ *et* $f'(0) = \dfrac{1}{4}$

donc une équation de la tangente (T) à (C)

au point I est : $y = f'(0) \times (x-0) + f(0)$ *Donc:* $\boxed{(T): y = \dfrac{1}{4}x + \dfrac{1}{2}}$

c. La construction de (C)



4) a) Montrons que f admet une fonction réciproque f^{-1}

La fonction f est continue et strictement croissante sur IR; donc f admet une fonction réciproque f^{-1} *définie sur l'intervalle* $f(IR)$ *telle que:*

$$f(IR)=\left]\lim_{x\to-\infty} f(x);\lim_{x\to+\infty} f\ (x)\right[=]0;1[$$

b) Montrons que $f^{-1}(x)=\ln\left(\dfrac{x}{1-x}\right)$ *tout* $x\in]0;1[$

Soit $x\in]0;1[$ *et* $y\in IR$ *tels que :* $f^{-1}(x)=y$

On a : $f^{-1}(x)=y\,e{+}1$

$$\Leftrightarrow x=f(y)\Leftrightarrow \frac{e^y}{e^y+1}=x$$

$$\Leftrightarrow \frac{e^y+1-1}{e^y+1}=x\Leftrightarrow 1-\frac{1}{e^y+1}=x$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{e^y+1}=1-x\Leftrightarrow e^y+1=\frac{1}{1-x}$$

$$\Leftrightarrow e^y=\frac{1}{1-x}-1\Leftrightarrow e^y=\frac{x}{1-x}$$

$$\Leftrightarrow y=\ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$$

Donc: $(\forall x\in]0;1[)$; $\boxed{f^{-1}(x)=\ln\left(\dfrac{x}{1-x}\right)}$