Examen national du baccalauréat session
de rattrapage 2015

Exercice 1 (3pts)

soit la suite (U_n) définie sur IN par : $\begin{cases} U_0 = 4 \\ U_{n+1} = \frac{2}{5}U_n + 3 \end{cases}$

1. a) *Montrer par récurrence que :* $U_n < 5$ *pour tout n de IN.*

   b) *Vérifier que :* $U_{n+1} - U_n = \frac{3}{5}(5 - U_n)$ *pour tout n dans IN, en déduire que la suite* (U_n) *est croissante*

   c) *Déduire que la suite* (U_n) *est convergente.*

2. *Soit la suite* $V_n = 5 - U_n$ *pour tout n dans IN*

   a) *Montrer que la suite* (V_n) *est géométrique de raison* $\frac{2}{5}$ *, puis écrire* V_n *en fonction de n.*

   b) *Déduire que :* $U_n = 5 - \left(\frac{2}{5}\right)^n$ *pour tout n dans IN et calculer la limite de la suite* (U_n)

Exercice 2 (3pts)

On considère dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ *le plan P d'équation :* $2x - z - 2 = 0$ *et la sphère (S) d'équation :*
$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2z - 7 = 0$

1. *Montrer que le point Ω(-1, 0,1) est le centre de la sphère (S) et 3est son rayon.*
2. a) *Calculer* $d(\Omega;(P))$

   b) *Déduire que le plan P coupe la sphère (S) selon un cercle (Γ).*
3. *Montrer que le rayon du cercle (Γ) est 2 et déterminer les coordonnées du point H centre du cercle (Γ)*

Exercice 3 (3pts)

1. a) *Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes* $\mathbb{C}$ *l'équation :*
   $z^2 - 8z + 32 = 0$

   b) *on considère le nombre complexe a tel que* $a = 4 + 4i$
   Ecrire a sous sa forme géométrique et déduire que a^{12} *est un réel négatif.*

2. On considère dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $\left(o;\vec{u};\vec{v}\right)$ les points A, B et C d'affixes respectifs $a=4+4i$; $b=2+3i$ et $c=3+4i$ Soient z l'affixe du point M du plan et z' l'affixe du point M' image de M par la rotation R de centre C et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

a) Montrer que : $z'=iz+7+i$

b) Montrer que l'affixe de D image de A par la rotation R est $d=3+5i$

c) Montrer que l'ensemble des points M tel que $|z-3-5i|=|z-4-4i|$ est la droite (BC).

Exercice 4 (3 pts)

Une caisse contient 5 jetons : 2 Blancs ,2 Verts et 1Rouge (indiscernables au toucher)

On tire de façon aléatoire successivement et avec remise trois jetons de la caisse.

1. On considère l'événement
A «les trois jetons tires sont de même couleur »
Montrer que : $P(A)=\frac{17}{125}$
Soit X la variable aléatoire égale au nombre de jetons Blancs tires donner la loi de probabilité que suit X.

Probléme (8pts)

I- Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x)=1-x+x\ln x$

1. a) Montrer que : $g'(x)=\ln x$ pour tout x de $]0;+\infty[$.

   b) Montrer que g est décroissante sur $]0;1]$ et croissante sur $[1;+\infty[$. Calculer g(1) et déduire que : $g(x)\geq 0$ pour tout x de $]0;+\infty[$

II - Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=3-\frac{1}{x^2}-\frac{2\ln x}{x}$

et (C_f) sa courbe dans un repère orthonormé $\left(o;\vec{i};\vec{j}\right)$ (unité 1cm).

1. montrer que : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$, Interpréter géométriquement Le résultat obtenu.

(pour calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ on remarquera que : $f(x)=\frac{3x^2-1-2x\ln x}{x^2}$ pour tout x dans $]0;+\infty[$).

2. Montrer que ; $\lim_{x\to+\infty} f(x)=3$ et déduire la nature de la branche infinie de (C_f) au voisinage de $+\infty$.

3. a) montrer que : $f'(x)=\dfrac{2g(x)}{x^3}$ pour tout x de $]0;+\infty[$.

   b) Interpréter géométriquement le résultat $f'(1)=0$.

   c) Montrer que f est croissante sur $]0,+\infty[$.

4. construire dans le même repère $(o;\vec{i};\vec{j})$ la courbe (C_f).

(On accepte que (C_f) admet deux points d'inflexion une d'abscisse 1 et l'autre d'abscisse dans l'intervalle $]2;2,5[$ on prend $f(0,3)=0$)

5. a) montrer que : $\int_1^e \dfrac{2\ln x}{x}dx=1$

   b) calculer en cm^2 l'air de la partie du plan délimitée par la courbe (C_f), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=e$.

6. Soit h la fonction définie sur IR^* par : $h(x)=3-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{\ln(x^2)}{|x|}$

   a) Montrer que la fonction h est pair et que $h(x)=f(x)$ pour tout x de $]0;+\infty[$.

   b) construire dans le même repère $(o;\vec{i};\vec{j})$ la courbe (C')de la fonction h.