

Exercice 1: (3 Pts) Thème: Nombres complexes

- 1) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives: $z_A = -4$; $z_B = -1 + i\sqrt{3}$ et $z_C = -iz_B$.
- Montrer que le triangle OBC est isocèle et que $(\vec{OB}; \vec{OC}) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$.
 - Ecrire z_B sous forme trigonométrique et déduire que le point B appartient au cercle de centre O et de rayon 2.
 - Placer le point A et construire les points B et C.
- 2) Soit D le point d'affixe $z_D = (1-i)z_B$.
- Montrer que le quadrilatère OCDB est un carré.
 - Montrer que $\text{Aff}(\vec{AB}) = \sqrt{3}z_C$
 - Déduire que les points A, B et D sont alignés
 - Calculer l'aire du quadrilatère OADC.

Exercice 2: (3 Pts) Thème: Suites numériques

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = \frac{3u_n}{1+2u_n} \end{cases} ; \forall n \in \mathbb{N}$$

- Calculer u_1 et u_2 .
 - Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n , $0 < u_n < 1$.
- Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
 - Démontrer que la suite (u_n) est convergente.
- Soit (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n , par: $v_n = \frac{u_n}{1-u_n}$
 - Montrer que: la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 3.
 - Exprimer pour tout entier naturel n ; v_n en fonction de n .
 - En déduire que : pour tout entier naturel n ; $u_n = \frac{3^n}{3^n + 1}$.
 - Déterminer la limite de la suite (u_n) .

Exercice 3: (3 Pts) Thème: Etude d'une fonction numérique

Partie I:

On considère la fonction g définie sur $]-1; +\infty[$ par : $g(x) = x + 1 - 2/\ln(x+1)$

1) Calculer $g'(x)$; puis dresser le tableau de variation de g .

2) Calculer $g(1)$; puis déduire que $\forall x \in]-1; +\infty[; g(x) > 0$.

Partie II:

Soit f une fonction définie sur $]-1; +\infty[$ par: $f(x) = x + 1 - (\ln(x+1))^2$

Et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$; puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$.

c) Montrer que (C_f) admet une branche parabolique de direction $(D): y = x$ au voisinage de $+\infty$

2) a) Montrer que: $\forall x \in]-1; +\infty[; f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)}$.

b) Montrer que: f est strictement croissante sur $]-1; +\infty[$ puis dresser le tableau de variation de f

3) Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point $A(0; 1)$.

4) a) Montrer que: $\forall x \in [e^{-1}; +\infty[; f(x) - x \leq 0$.

b) Étudier les positions relatives de (C_f) et la droite $(D): y = x$

5) a) Montrer que: $\forall x \in]-1; +\infty[; f''(x) = \frac{-2 + 2\ln(x+1)}{(x+1)^2}$.

b) Montrer que le point d'abscisse $(e-1)$ est un point d'inflexion à la courbe (C_f) .

6) Montrer que: l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique sur l'intervalle $]-1; 0[$

7) Tracer $(D); (T)$ et (C_f) la courbe représentative de la fonction f dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Partie III:

Soit (u_n) la suite numérique définie sur $\mathbb{N}$ par:
$$\begin{cases} u_0 = e \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases} \quad ; \forall n \in \mathbb{N}$$

1) Montrer que: $\forall n \in \mathbb{N}; u_n \geq e - 1$

2) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

Partie IV:

Soit h la fonction définie par: $h(x) = \frac{f(x)}{x+1}$; pour tout $x \in]-1; +\infty[$

Déterminer la fonction H , la primitive de la fonction h qui vérifie $H(0) = 0$