Correction Examen National baccalauréat
Session de rattrapage 2023_2éme Bac PC-SVT

Excercice1

$$(u_n):\begin{cases} u_0=0 \\ u_{n+1}=\dfrac{u_n-2}{2u_n+5} \end{cases} \quad (\forall n\in\mathbb{N})$$

1) Montrons par récurrence que $(\forall n\in\mathbb{N})$; $u_n>-1$

Initialisation :

Pour n=o $u_0=0$ donc $u_0>-1$

Hérédité :

Soit $n\in\mathbb{N}$ Supposons que : $u_n>-1$ et Montrons que : $u_{n+1}>-1$

On a : $u_{n+1}-(-1)=\dfrac{u_n-2}{2u_n+5}+1$

$$=\frac{u_n-2+2u_n+5}{2u_n+5}$$

$$=\frac{3u_n+3}{2u_n+5}$$

$$=\frac{3(u_n+1)}{2u_n+5}$$

D'après l'hypothèse de récurrence $u_n>-1\Rightarrow\begin{cases} u_n+1>0 \\ 2u_n+5>0 \end{cases}$

Donc $u_{n+1}-(-1)>0\Rightarrow u_{n+1}>-1$

Conclusion D'après le principe de récurrence $(\forall n\in\mathbb{N})$; $u_n>-1$

2) Pour tout $n\in\mathbb{N}$; on a : $u_{n+1}-u_n=\dfrac{u_n-2}{2u_n+5}-u_n$

$$=\frac{u_n-2-u_n(2u_n+5)}{2u_n+5}$$

$$=\frac{u_n-2-2u_n^2-5u_n}{2u_n+5}$$

$$=\frac{-2u_n^2-4u_n-2}{2u_n+5}$$

$$=\frac{-2(u_n^2+2u_n+1)}{2u_n+5}$$

$$= -\frac{2(u_n+1)^2}{2u_n+5}$$

et puisque $\begin{cases} (u_n+1)^2 > 0 \\ 2u_n+5>0 \end{cases}$; alors $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_{n+1} - u_n$

D'où (u_n) est une suite décroissante et comme (u_n) est minorée par -1 ; alors elle est convergente.

3) a) On a : $v_n = \dfrac{3}{1+u_n}$

Alors : $v_{n+1} - v_n = \dfrac{3}{1+u_{n+1}} - \dfrac{3}{1+u_n}$

$$= \frac{3}{1+\frac{u_n-2}{2u_n+5}} - \frac{3}{1+u_n}$$

$$= \frac{3(2u_n+5)}{2u_n+5+u_n-2} - \frac{3}{1+u_n}$$

$$= \frac{3(2u_n+5)}{3u_n+3} - \frac{3}{1+u_n}$$

$$= \frac{2u_n+5-3}{1+u_n}$$

$$= \frac{2(u_n+1)}{1+u_n} = 2$$

D'où (v_n) est une suite arithmétique de raison $r=2$ et de premier terme $v_0 = \dfrac{3}{1+u_0} = 3$

b) On a : $v_n = \dfrac{3}{1+u_n} \Rightarrow (1+u_n)v_n = 3$

$$\Rightarrow u_n \times v_n = 3 - v_n$$

$$\Rightarrow u_n = \frac{3-v_n}{v_n}$$

Donc $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n = \dfrac{3-v_n}{v_n}$

et comme (v_n) est une suite arithmétique de raison $r=2$

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; on a : $v_n = v_0 + nr$

$$= 3+2n$$

Donc $u_n = \dfrac{3-(3+2n)}{3+2n}$

$$= \frac{-2n}{3+2n}$$

$$= \frac{-2}{\frac{3}{n}+2}$$

D'où $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $u_n = \frac{-2}{\frac{3}{n}+2}$

Par suite $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{-2}{\frac{3}{n}+2}$

Alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -1$

4) On pose $w_n = e^{3-v_n}$ et $S_n = w_0 + w_1 + \cdots + w_n$, pour tout n de $\mathbb{N}$

a) pour tout $n \in \mathbb{N}$; on a : $w_{n+1} = e^{3-v_{n+1}}$

$$\begin{aligned} &= e^{3-(v_n+2)} \\ &= e^{3-v_n-2} \\ &= e^{-2} \times e^{3-v_n} \\ &= e^{-2} \times w_n \end{aligned}$$

Donc $(\forall n \in \mathbb{N})$; $w_{n+1} = e^{-2} \times w_n$

D'où (w_n) est une suite géométrique de raison $q = e^{-2}$; et de premier terme $w_0 = e^{3-v_0} = e^{3-3} = 1$

b) pour tout n de $\mathbb{N}$; $S_n = w_0 + w_1 + \cdots + w_n$

$$\begin{aligned} &= w_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \\ &= \frac{1-\left(e^{-2}\right)^{n+1}}{1-e^{-2}} \\ &= \frac{e^2-\left(e^{-2}\right)^{n}}{e^2-1} \end{aligned}$$

Et comme $-1 < e^{-2} < 1$; alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(e^{-2}\right)^n = 0$; d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \frac{e^2}{e^2-1}$

Exercice 2

$A(2,1,2)$; $B(-2,0,5)$; $C(4,-5,7)$ et $\Omega(1,-1,0)$. On pose $\vec{u} = \overrightarrow{\Omega A}$

Soit (S) la sphère de centre Ω et de rayon $R = 3$

1) a) On a : $\overrightarrow{\Omega A} = (x_A - x_\Omega)\vec{i} + (y_A - y_\Omega)\vec{j} + (z_A - z_\Omega)\vec{k}$

$$\begin{aligned} &= (2-1)\vec{i} + (1+1)\vec{j} + (2-0)\vec{k} \\ &= \vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k} \end{aligned}$$

Donc $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$

D'autre part $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}-4\\-1\\3\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}2\\-6\\5\end{pmatrix}$

$$=\begin{vmatrix}-1 & -6\\ 3 & 5\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}-4 & 2\\ 3 & 5\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}-4 & 2\\ -1 & -6\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=13\vec{i}+26\vec{j}+26\vec{k}$$

$$=13\left(\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}\right)$$

Donc $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=13\vec{u}$

$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\neq\vec{0}$; on en déduit que les points A, B et C ne sont pas alignés ; et que la vecteur $\vec{u}=\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}$ est un vecteur normale au plan (ABC).

b) Donc $x+2y+2z+d=0$ est une équation cartésienne du plan (ABC)

et comme $A(2,1,2)\in(ABC)$; alors $2+2\times1+2\times2+d=0\Rightarrow d=-8$

Par suite $x+2y+2z-8=0$ est une équation cartésienne du plan (ABC)

c) Calculons $d\left(\Omega;(ABC)\right)$

On a : $d\left(\Omega;(ABC)\right)=\dfrac{\left|x_\Omega+2y_\Omega+2z_\Omega-8\right|}{\|\vec{u}\|}$

$$=\frac{\left|1+2\times(-1)+2\times0-8\right|}{\left\|\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}\right\|}$$

$$=\frac{9}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}$$

$$=\frac{9}{\sqrt{9}}=3$$

Donc $d\left(\Omega;(ABC)\right)=R$

D'où le plan (ABC) est tangent à la sphère (S).

De plus on a : $\vec{u}=\overrightarrow{\Omega A}\Rightarrow\Omega A=\|\vec{u}\|=3$; donc $A\in(S)$

Par conséquent A est le point de contact du plan (ABC) et la sphère (S).

2) a) (P) le plan d'équation cartésienne $3x+4y+z+1=0$ et (Δ) la droite passant par le point A et orthogonale au plan (P)

On a : $(\Delta)\perp(P)$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\4\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (P) ; alors $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\4\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (Δ) et (Δ) passe par le point A

D'où une représentation paramétrique de (Δ) et : $\begin{cases}x=x_A+3t\\ y=y_A+4t \quad / t\in\mathbb{R}\\ z=z_A+t\end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2+3t \\ y = 1+4t \\ z = 2+t \end{cases} \quad / \, t \in \mathbb{R}$$

Alors $H\begin{pmatrix} x_H \\ y_H \\ z_H \end{pmatrix} \in \big((\Delta)\cap(P)\big) \Leftrightarrow \begin{cases} x_H = 2+3t \\ y_H = 1+4t \\ z_H = 2+t \\ 3x_H + 4y_H + z_H + 1 = 0 \end{cases}$

Donc $3(2+3t)+4(1+4t)+(2+t)+1=0 \Rightarrow 26t=-13$

$$\Rightarrow t = -\frac{1}{2}$$

D'où $\begin{cases} x_H = 2+3\times\left(-\frac{1}{2}\right) \\ y_H = 1+4\times\left(-\frac{1}{2}\right) \\ z_H = 2-\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_H = \frac{1}{2} \\ y_H = -1 \\ z_H = \frac{3}{2} \end{cases}$

Par suite la droite (Δ) coupe le plan (P) au point $H\left(\frac{1}{2},-1,\frac{3}{2}\right)$

b) H le milieu de $[AD]$

Alors $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AH}$

Donc $\begin{pmatrix} x_D - x_A \\ y_D - y_A \\ z_D - z_A \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x_H - x_A \\ y_H - y_A \\ z_H - z_A \end{pmatrix}$

D'où $\begin{cases} x_D - x_A = 2(x_H - x_A) \\ y_D - y_A = 2(y_H - y_A) \\ z_D - z_A = 2(z_H - z_A) \end{cases}$

Donc $\begin{cases} x_D = 2\left(\frac{1}{2}-2\right)+2 = -1 \\ y_D = 2(-1-1)+1 = -3 \\ z_D = 2\left(\frac{3}{2}-2\right)+2 = 1 \end{cases}$

Alors $D\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

3) a) (Q) le plan passant par le point D et de vecteur normal $\overrightarrow{\Omega D}$

On a : $\overrightarrow{\Omega D}$ est un vecteur normal au plan (Q) et $D \in (Q)$

Donc : $d(\Omega;(Q))=\Omega D$ (car D est le projeté orthogonal de Ω sur(Q))

$$=\sqrt{(-1-1)^2+(-3+1)^2+(1-0)^2}$$
$$=\sqrt{4+4+1}=3$$

D'où $d(\Omega;(Q))=R$

Alors le plan (Q) est tangent à la sphère(S)en D.(car $D\in(Q)$et $\Omega D=3\Rightarrow D\in(S)$)

b) On a (ABC) de vecteur normal $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$

et (Q) de vecteur normal $\overrightarrow{\Omega D}\begin{pmatrix}-2\\-2\\1\end{pmatrix}$; on a : $\frac{1}{-2}\neq\frac{2}{-2}\neq\frac{2}{1}$; alors il n'existe pas de réel k tel que $\overrightarrow{\Omega D}=k\vec{u}$

Alors $\overrightarrow{\Omega D}$ et $\vec{u}$ ne sont pas colinéaires

Donc (Q)et (ABC) sont sécants.

Soit $M(x;y;z)$un point de l'espace :

$$M\in(Q)\Leftrightarrow\overrightarrow{MD}.\overrightarrow{\Omega D}=0$$
$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}-1-x\\-3-y\\1-z\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}-2\\-2\\1\end{pmatrix}=0$$
$$\Leftrightarrow-2\times(-1-x)-2\times(-3-y)+(1-z)=0$$
$$\Leftrightarrow 2+2x+6+2y+1-z=0$$
$$\Leftrightarrow 2x+2y-z+9=0$$

On a : ► $2x_B+2y_B-z_B+9=-4+0-5+9=0$; donc $B\in(Q)$

► $2x_C+2y_C-z_C+9=8-10-7+9=0$; donc $C\in(Q)$

Et puisque B et C sont deux points distincts qui appartiens à (ABC) et (Q) ; alors (ABC) et (Q) se coupent suivant la droite (BC)

<u>Exercice 3:</u>

1) a) On a : $a=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i\Rightarrow a=\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

$$\Rightarrow\boxed{a=\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)}$$

b) On a : $a=\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

Donc $a^{2022}=\sqrt{3}^{2022}\left(\cos\frac{2022\pi}{3}+i\sin\frac{2022\pi}{3}\right)$

$$= 3^{1011}\left(\cos(674\pi) + i\sin(674\pi)\right)$$

$$= 3^{1011}\left(\underbrace{\cos(0+2\times 337\pi)}_{=1} + i\underbrace{\sin(0+2\times 337\pi)}_{=0}\right)$$

$$= 3^{1011}$$

Donc a^{2022} est un nombre réel

2) la rotation R de centre O transforme B en A

Alor s : $R\left(B(z_B)\right) = A(z_A) \Leftrightarrow z_A - z_O = e^{i\alpha}\left(z_B - z_O\right)$

$$\Leftrightarrow z_A = z_B e^{i\alpha}$$

$$\Leftrightarrow \frac{z_A}{z_B} = e^{i\alpha}$$

$$\Leftrightarrow e^{i\alpha} = \frac{a}{\overline{a}}$$

$$\Leftrightarrow e^{i\alpha} = \frac{\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)}{\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)}$$

$$\Leftrightarrow e^{i\alpha} = \frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{e^{-i\frac{\pi}{3}}}$$

$$\Leftrightarrow e^{i\alpha} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

Donc $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ est une mesure de l'angle de la rotation R.

3) a) (E_α) : $z^2 - \sqrt{3}z + \alpha = 0$

pour que (E_α) ait deux solutions complexes il faut que le discriminent soit strictement négatif ; donc $\Delta = \left(\sqrt{3}\right)^2 - 4\times 1\times\alpha < 0 \Rightarrow 3 - 4\alpha < 0$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha > \frac{3}{4}}$$

Sachant que si z est solution de (E_α) alors $\overline{z}$ l'est aussi est on a : $\boxed{z\overline{z} = \alpha}$

(rappel $z_1 z_2 = \frac{c}{a}$)

b) On (rappel $z_1 + z_2 = \frac{-b}{a}$) ; donc $z + \overline{z} = \sqrt{3} \Rightarrow \overline{z} = \sqrt{3} - z$

$$\Rightarrow |\overline{z}| = \left|\sqrt{3} - z\right|$$

et $|\overline{z}| = |z|$; $\left|z - \sqrt{3}\right| = \left|\sqrt{3} - z\right|$

$$\Rightarrow |z| = \left|z - \sqrt{3}\right|$$

D'où $\boxed{|z| = |z - \sqrt{3}|}$

c) On a : $\begin{cases} |z| = |z - \sqrt{3}| \\ |\overline{z}| = |\overline{z - \sqrt{3}}| \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |z| = |z - \sqrt{3}| \\ |\overline{z}| = |\overline{z} - \sqrt{3}| \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} OM = PM \\ ON = PN \end{cases}$$

Donc $M(z)$ et $N(\overline{z})$ appartiennent à la médiatrice (Δ) du segment $[OP]$.

d) On a : $|z - \sqrt{3}| = \sqrt{3}$ et $|z| = |z - \sqrt{3}|$; donc $|z| = \sqrt{3}$

de plus on a **:** $z\overline{z} = \alpha \Rightarrow |z|^2 = \alpha$

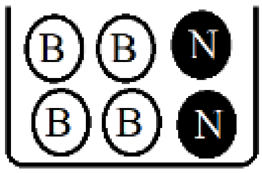
$$\Rightarrow \boxed{\alpha = 3}$$

On a $|z| = |\overline{z}| = \sqrt{3}$; donc M et N appartiennent au cercle de centre P et de rayon $\sqrt{3}$.

D'où $M(z)$ et $N(\overline{z})$ sont les points d'intersection de la droite (Δ) et le cercle de centre P et de rayon $\sqrt{3}$.

<u>Exercice 4</u> (3points) :

Une urne contient quatre boules blanches et deux boules noires



1) On tire au hasard et simultanément deux boules de l'urne.

Donc $Card(\Omega) = C_6^2 = 15$

a) A :" tirer au moins une boule noire".

$\overline{A}$:" les deux boules tirée sont Blanches".

Donc $p(\overline{A}) = \dfrac{C_4^2}{15} = \dfrac{6}{15} = \dfrac{2}{5}$

D'où $p(A) = 1 - p(\overline{A}) = \dfrac{5-2}{5} = \dfrac{3}{5}$

Alors $\boxed{p(A) = \dfrac{3}{5}}$

b) B : "Obtenir deux boules de même couleur".

B : "Tirer deux boules Blanche ou deux boules Noires".

Donc $p(B) = \dfrac{C_4^2 + C_2^2}{15} = \dfrac{1+6}{15} = \dfrac{7}{15}$

Alors $\boxed{p(B) = \dfrac{7}{15}}$

c) L'expérience suit une loi binomiale de paramètres $n=5$ et $p=p(\mathrm{B})=\dfrac{7}{15}$

B soit réalisé exactement trois fois.

$$p(\mathrm{X}=\mathrm{B})=\mathrm{C}_5^3\times p^3\times(1-p)^2$$
$$=\mathrm{C}_5^3\times\left(\frac{7}{15}\right)^3\times\left(1-\frac{7}{15}\right)^2$$
$$=\frac{10\times7^3\times8^2}{15^3\times15^2}=\frac{43904}{151875}$$

2) Dans cette question, on tire des boules de l'urne, une après l'autre et sans remise et on arrête le tirage lorsqu'on obtient une boule blanche pour la première fois.

X la variable aléatoire qui est égale au nombre de tirages effectués dans cette expérience.

a) La boule Blanche peut être tirée dès le premier tirage ou le deuxième tirage ou surement au troisième tirage donc l'expérience s'arrête ; d'où les valeurs prises par X sont : 1 ; 2 et 3.

b) ► $X=2$:"On tire une boule Noire puis une boule Blanche ″.

$$p(X=2)=\frac{\mathrm{A}_2^1\times\mathrm{A}_4^1}{\mathrm{A}_6^2}=\frac{4}{15}$$

c) ► $X=1$:"On tire une boule Blanche au premier tirage et on arrête l'expérience ″.

$$p(X=1)=\frac{\mathrm{A}_4^1}{\mathrm{A}_6^2}=\frac{2}{3}$$

► $X=3$:"On tire deux fois une boule Noire puis une boule Blanche ″.

$$p(X=3)=\frac{\mathrm{A}_2^1}{\mathrm{A}_6^1}\times\frac{\mathrm{A}_1^1}{\mathrm{A}_5^1}\times\frac{\mathrm{A}_4^1}{\mathrm{A}_4^1}=\frac{2\times1\times4}{6\times5\times4}=\frac{1}{15}$$

D'où la loi de probabilité de X

x_i	1	2	3
$p(X=x_i)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{15}$

d) Soit D l'événement :" obtenir au moins une boule noire ″

$\bar{D}$ " N'obtenir aucune boule noire″ " obtenir une boule Blanche au premier tirage″

$$p(\bar{D})=p(X=1)=\frac{2}{3}$$

D'où $p(D)=1-p(\bar{D})=\dfrac{1}{3}$

<u>Problème</u>

f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x)=(x-1)^2 e^{x(2-x)} & ;\ x\leq 2 \\ f(x)=1+(x-2)^2\ln(x-2) & ;\ x>2 \end{cases}$

1) On a : $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\left(1+(x-2)^2\ln(x-2)\right)$

On pose : $t=x-2$; alors $x\to 2^+ \Rightarrow t\to 0^+$

Donc $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{t\to 0^+}\left(1+t^2\ln t\right)=1$ (car $\lim\limits_{t\to 0^+} t^2\ln t=0$

Et $f(2)=(2-1)^2 e^{2(2-2)}$

$=1\times e^0=1$

D'où $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=f(2)$

Par suite f est continue à droite en 2 ; et comme $x\mapsto (x-1)^2 e^{x(2-x)}$ est continue à gauche en 2 ; alors f est continue en 2.

2) a) pour tout $x<2$ et $x\neq 0$,on a : $\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\dfrac{(x-1)^2 e^{x(2-x)}-1}{x-2}$

$$=\frac{(x^2-2x)e^{x(2-x)}+e^{x(2-x)}-1}{x-2}$$

$$=\frac{x(x-2)e^{x(2-x)}+e^{x(2-x)}-1}{x-2}$$

$$=x.e^{x(2-x)}+\frac{e^{x(2-x)}-1}{x-2}$$

$$=x.e^{x(2-x)}-x.\frac{e^{x(2-x)}-1}{x(2-x)}$$

Donc $(\forall x<2)$ et $x\neq 0$; $\boxed{\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=x.e^{x(2-x)}-x.\dfrac{e^{x(2-x)}-1}{x(2-x)}}$

b) il en résulte que $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^-}\left(x.e^{x(2-x)}-x.\dfrac{e^{x(2-x)}-1}{x(2-x)}\right)$

$$=\lim_{x\to 2^-}\left(x.e^{x(2-x)}-x.\frac{e^{x(2-x)}-1}{x(2-x)}\right)$$

On pose $t=x(2-x)$; alors $x\to 2^- \Rightarrow t\to 0^+$ et $-t=x^2-2x \Rightarrow 1-t=x^2-2x+1$

$$\Rightarrow 1-t=(x-1)^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{1-t}=x-1$$

Car x est au voisinage de 2 donc $x-1>0$

D'où $x=1+\sqrt{1-t}$

Donc $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{t\to 0^+}\left(\left(1+\sqrt{1-t}\right).e^t-\left(1+\sqrt{1-t}\right).\dfrac{e^t-1}{t}\right)$

$$=(2-2.\times 1)=0 \text{ (car } = \lim_{t\to 0^+}\left(\frac{e^t-1}{t}\right)=1)$$

Par suite f est dérivable à gauche en *2* et $f_g'(2)=0$.

c) On a : $\lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\left(\frac{1+(x-2)^2\ln(x-2)-1}{x-2}\right)$

$$=\lim_{x\to 2^-}\left(\frac{(x-2)^2\ln(x-2)}{x-2}\right)$$

$$=\lim_{x\to 2^-}((x-2)\ln(x-2))$$

$t=x-2$; alors $x\to 2^+ \Rightarrow t\to 0^+$

Donc $\lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{t\to 0^+}(t\ln t)=0$

Par suite f est dérivable à droite en 2 et $f_d'(2)=0$.

On conclut que f est dérivable en 2 et $f'(2)=0$. (Car $f_d'(2)=f_g'(2)=0$)

Interprétation Géométrique :

(C) admet une tangente horizontale au point $I(2;1)$

3) a) Soit $x\le 2$

$f(x)=(x-1)^2e^{x(2-x)}$

$=(x^2-2x)e^{x(2-x)}+e^{x(2-x)}$

$=x(x-2)e^{x(2-x)}+e^{x(2-x)}$

b) $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(x(x-2)e^{x(2-x)}+e^{x(2-x)}\right)$

$=\lim_{x\to-\infty}\left(-x(2-x)e^{x(2-x)}+e^{x(2-x)}\right)$

On pose $t=x(2-x)$; alors $x\to-\infty\Rightarrow t\to-\infty$

Donc $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(-te^t+e^t\right)=0$ (car $\lim_{x\to-\infty}te^t=\lim_{x\to-\infty}e^t=0$)

Alors : $\boxed{\lim_{x\to-\infty}f(x)=0}$

Interprétation Géométrique :

(C) admet une asymptote horizontale d'équation $y=0$ au voisinage de $-\infty$.

c) On a :► $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(1+(x-2)^2\ln(x-2)\right)$

On pose $t=(x-2)$; alors $x\to+\infty\Rightarrow t\to+\infty$

Donc $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{t\to+\infty}\left(1+t^2\ln t\right)=+\infty$ (car $\lim_{t\to+\infty}t^2=\lim_{t\to+\infty}\ln t=+\infty$)

Alors : $\boxed{\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty}$

▶ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1+(x-2)^2\ln(x-2)}{x}\right)$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1+(x-2)^2\ln(x-2)}{x}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}+\frac{(x-2)^2}{x}\times\ln(x-2)\right)$$

On pose $t=(x-2)$; alors $x\to+\infty\Rightarrow t\to+\infty$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{t\to+\infty}\left(\dfrac{1}{t+2}+\dfrac{t^2}{t+2}\times\ln t\right)=+\infty$

(Car $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{1}{t+2}=0$ et $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{t^2}{t+2}=\lim\limits_{t\to+\infty}\ln t=+\infty$)

4) a) f est dérivable sur $]-\infty;2[$ et pour tout $x<2$, on a :

$$f'(x)=\left((x-1)^2e^{x(2-x)}\right)'$$

$$=2(x-1)e^{x(2-x)}+(x-1)^2(x(2-x))'e^{x(2-x)}$$

$$=\left(2+(x-1)((2-x)-x)\right)(x-1)e^{x(2-x)}$$

$$=\left(2+2(x-1)(1-x)\right)(x-1)e^{x(2-x)}$$

$$=\left(2+2(x-1)(1-x)\right)(x-1)e^{x(2-x)}$$

$$=2\left(1-(x-1)^2\right)(x-1)e^{x(2-x)}$$

$$=2\left(2x-x^2\right)(x-1)e^{x(2-x)}$$

$$=2x(x-1)(2-x)e^{x(2-x)}$$

Donc $(\forall x<2)$; $\boxed{f'(x)=2x(x-1)(2-x)e^{x(2-x)}}$

b) f est dérivable sur $]2;+\infty[$ et pour tout $x>2$, on a :

$$f'(x)=\left(1+(x-2)^2\ln(x-2)\right)'$$

$$=2(x-2)\ln(x-2)+(x-2)^2\frac{1}{x-2}$$

$$=2(x-2)\ln(x-2)+(x-2)$$

$$=(x-2)\left(1+2\ln(x-2)\right)$$

Donc $(\forall x>2)$; $\boxed{f'(x)=(x-2)\left(1+2\ln(x-2)\right)}$

c) Soit $x>2$; on a : $1+2\ln(x-2)\le 0\Leftrightarrow \ln(x-2)\le-\dfrac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow x-2\le e^{-\frac{1}{2}}$$

$$\Leftrightarrow x \leq e^{-\frac{1}{2}} + 2$$

Donc $\boxed{S = \left]2 ; e^{-\frac{1}{2}} + 2\right]}$

b) ► $(\forall x < 2)$; $f'(x) = 2x(x-1)(2-x)e^{x(2-x)}$; on a : $(2-x)e^{x(2-x)} > 0$

Donc $f'(x)$ est du signe de $x(x-1)$ sur $]-\infty;2[$

Tableau de signe de $f'(x)$

x	$-\infty$		0		1		2
$(x-1)$		$-$			0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

► $(\forall x > 2)$; $f'(x) = (x-2)(1+2\ln(x-2))$; on a : $x-2>0$

Donc $f'(x)$ est du signe de $(1+2\ln(x-2))$ sur $]2;+\infty[$

Tableau de signe de $f'(x)$

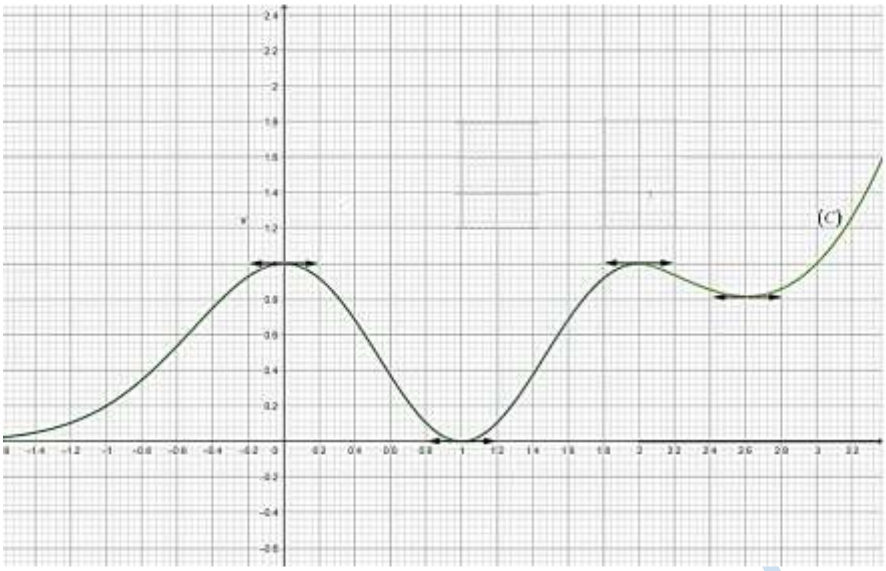
x	2		$e^{-\frac{1}{2}}+2$		$+\infty$
$(1+2\ln(x-2))$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

D'où le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$		0		1		2		$e^{-\frac{1}{2}}+2$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$1-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}$	$\nearrow$	$+\infty$

5) *Construction de la courbe* (C)

(On donne : $f(3)=1$; $2+\frac{1}{\sqrt{e}} \simeq 2{,}6$ *et* $f\left(2+\frac{1}{\sqrt{e}}\right) \simeq 0{,}8$



6) *Soit* $\lambda \in]2,3[$

a) *On pose :* $\begin{cases} u = \ln(x-2) & u' = \dfrac{1}{x-2} \\ v = (x-2)^2 & v = \dfrac{1}{3}(x-2)^3 \end{cases}$

$$\text{Donc } \int_\lambda^3 (x-2)^2 \ln(x-2)\,dx = \left[\frac{1}{3}(x-2)^3 \ln(x-2)\right]_\lambda^3 - \int_\lambda^3 \frac{1}{x-2} \times \frac{1}{3}(x-2)^3\,dx$$

$$= -\frac{1}{3}(\lambda-2)^3 \ln(\lambda-2) - \frac{1}{3}\int_\lambda^3 (x-2)^2\,dx$$

$$= -\frac{1}{3}(\lambda-2)^3 \ln(\lambda-2) - \frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}(x-2)^3\right]_\lambda^3$$

$$= -\frac{1}{3}(\lambda-2)^3 \ln(\lambda-2) - \frac{1}{9}\left(1-(\lambda-2)^3\right)$$

$$= -\frac{1}{9} - \frac{1}{3}(\lambda-2)^3 \ln(\lambda-2) + \frac{1}{9}(\lambda-2)^3$$

$$= -\frac{1}{9} + \frac{1}{3}(\lambda-2)^3\left(\frac{1}{3} - \ln(\lambda-2)\right)$$

Donc $\boxed{\int_\lambda^3 (x-2)^2 \ln(x-2)\,dx = -\frac{1}{9} + \frac{1}{3}(\lambda-2)^3\left(\frac{1}{3} - \ln(\lambda-2)\right)}$

b) *Soit* $\mathcal{A}(\lambda)$ *l'aire de la partie du plan limitée par la courbe* (C) *et les droites d'équations :* $y=1,\ x=\lambda$ *et* $x=3$

On a : $\mathcal{A}(\lambda) = \int_\lambda^3 |f(x)-1|\,dx$ *et* $f(x) \geq 0$ *sur* $]2,3[$

Donc $\mathcal{A}(\lambda) = \int_\lambda^3 f(x)\,dx$

$$= \int_\lambda^3 \left|1+(x-2)^2 \ln(x-2) - 1\right| dx$$

$$= \int_\lambda^3 \left|(x-2)^2 \ln(x-2)\right| dx \quad \text{et } \lambda \leq x \leq 3 \Rightarrow \lambda - 2 \leq x-2 \leq 1$$

$$\Rightarrow \ln(x-2)\leq 0$$

Donc $\int_{\lambda}^{3}\left|(x-2)^2\ln(x-2)\right|dx=\int_{\lambda}^{3}-(x-2)^2\ln(x-2)\,dx$

$$=-\int_{\lambda}^{3}(x-2)^2\ln(x-2)\,dx$$

$$=\frac{1}{9}-\frac{1}{3}(\lambda-2)^3\left(\frac{1}{3}-\ln(\lambda-2)\right)\quad (u.a)$$

D'où $\boxed{\mathcal{A}(\lambda)=\frac{1}{9}-\frac{1}{3}(\lambda-2)^3\left(\frac{1}{3}-\ln(\lambda-2)\right)\quad (u.a)}$

c) $\lim\limits_{\lambda\to 2^+}\mathcal{A}(\lambda)=\lim\limits_{\lambda\to 2^+}\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{3}(\lambda-2)^3\left(\frac{1}{3}-\ln(\lambda-2)\right)\right)$

et $\lim\limits_{\lambda\to 2^+}(\lambda-2)^3=\lim\limits_{\lambda\to 2^+}\left((\lambda-2)^3\ln(\lambda-2)\right)=0$

Donc $\boxed{\lim\limits_{\lambda\to 2^+}\mathcal{A}(\lambda)=\frac{1}{9}}$