

Exercice 1

On considère la fonction f définie sur $]-\infty; \frac{\pi}{2}[$ par :
$$\begin{cases} f(x) = \sqrt[3]{1-x} + x - 1 & \text{si } x < 0 \\ f(x) = \text{Arctan}(\sqrt[3]{x} + \tan x) & \text{si } x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[\end{cases}$$

Et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1) Montrer que f est continue sur $]-\infty; \frac{\pi}{2}[$.

2) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{x}$.

b) Interpréter géométriquement les résultats.

c) Etudier la branche infinie de (C_f) au voisinage de $-\infty$.

3) Soit g la restriction de f à l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$.

a- Montrer que g réalise une bijection de $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$ vers lui-même.

b- résoudre l'équation $g^{-1}(x) = x$, où g^{-1} est la fonction réciproque de g .

c- Résoudre l'inéquation : $g^{-1}(x) < x$.

Corrigé

1) Montrons que f est continue sur $]-\infty; \frac{\pi}{2}[$. Comme la fonction : $x \mapsto 1-x$ est continue sur $]-\infty; 0[$ (fonction polynomiale) et comme $\forall x \in]-\infty; 0[; 1-x > 0$ alors la fonction $x \mapsto \sqrt[3]{1-x}$ est continue sur $]-\infty; 0[$ et par suite la fonction est continue sur $]-\infty; 0[$. Comme la fonction :

$x \mapsto \sqrt[3]{x} + \tan x$ est continue sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$ (somme de deux fonctions continues) et comme la

fonction Arctan est continue sur $\mathbb{R}$ alors la fonction : $x \mapsto \text{Arctan}(\sqrt[3]{x} + \tan x)$ c.à.d f est

continue sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$ (composée de fonctions continues).

2) a) On a : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{1-x} + x - 1$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{-x} \left(\sqrt[3]{\frac{1}{x} + 1} - \frac{\sqrt[3]{(1-x)^3}}{\sqrt[3]{-x}} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{-x} \left(\sqrt[3]{\frac{1}{x}} + 1 - \sqrt[3]{\frac{(1-x)^3}{-x}} \right) = -\infty$$

$$(Car \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{-x} = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} -\sqrt[3]{\frac{(1-x)^3}{-x}} = -\infty)$$

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{1-x} + x - 1}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{1-x}}{x} + 1 - \frac{1}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} -\sqrt[3]{\frac{1-x}{-x^3}} + 1 - \frac{1}{x} = 1 \end{aligned}$$

$$(Car \lim_{x \rightarrow -\infty} -\sqrt[3]{\frac{1-x}{-x^3}} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0)$$

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt[3]{1-x} + x - 1}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt[3]{1-x} - 1}{x} + 1 \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(1-x) - 1}{x \left(\sqrt[3]{1-x}^2 + \sqrt[3]{1-x} + 1 \right)} + 1 \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-1}{\left(\sqrt[3]{1-x}^2 + \sqrt[3]{1-x} + 1 \right)} + 1 = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\text{Arctan}(\sqrt[3]{x} + \tan x)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\text{Arctan}(\sqrt[3]{x} + \tan x)}{(\sqrt[3]{x} + \tan x)} \times \frac{(\sqrt[3]{x} + \tan x)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\text{Arctan}(\sqrt[3]{x} + \tan x)}{(\sqrt[3]{x} + \tan x)} \times \frac{\sqrt[3]{x}}{x} \times \frac{\tan x}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\text{Arctan}(\sqrt[3]{x} + \tan x)}{(\sqrt[3]{x} + \tan x)} \times \sqrt[3]{\frac{1}{x^2}} \times \frac{\tan x}{x} = +\infty \end{aligned}$$

$$(car \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\text{Arctan}(\sqrt[3]{x} + \tan x)}{(\sqrt[3]{x} + \tan x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\text{Arc tan } X}{X} = 1 \text{ (on pose } X = \sqrt[3]{x} + \tan x ;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\tan x}{x} = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[3]{\frac{1}{x^2}} = +\infty)$$

b) • $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{x} = \frac{2}{3}$ donc f est dérivable à gauche en 0 et $f'_d(0) = \frac{2}{3}$

• $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ donc f n'est pas dérivable à droite en 0 .

c) On a : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$; calculons $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x)$

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt[3]{1-x} + x - 1 - x)$
 $= \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt[3]{1-x} - 1) = +\infty$

Donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x) = +\infty$ d'où (C_f) admet une branche

parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $-\infty$

3) a- Comme les deux fonctions : $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ et $x \mapsto \tan x$ sont strictement croissantes sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$

alors la fonction : $x \mapsto \sqrt[3]{x} + \tan x$ est croissante sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$ (somme de deux fonctions strictement croissantes)

Et comme la fonction Arctan est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ alors la fonction g est strictement croissante sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$ (composée de deux fonctions strictement croissantes), e

comme la fonction g est continue sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$ (car f l'est), alors la fonction g réalise une

bijection de $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$ vers l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$ car ; $g\left(\left[0; \frac{\pi}{2}\right[\right) = \left[g(0); \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} g(x)\right)$

En effet, on a : $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} g(x) = \frac{\pi}{2}$

, puisque $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \sqrt[3]{x} + \tan x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{Arctan}(x) = \frac{\pi}{2}$.

b- Résolvons l'équation $g^{-1}(x) = x$ où g^{-1} est la fonction réciproque de g .

On a : $\left(\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[\right) g^{-1}(x) = x \Leftrightarrow x = g(x)$

$\Leftrightarrow x = \text{Arctan}(\sqrt[3]{x} + \tan x)$

$\Leftrightarrow \tan x = \sqrt[3]{x} + \tan x$

$\Leftrightarrow \sqrt[3]{x} = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$

c- Résolvons l'inéquation : $g^{-1}(x) < x$

$$\left(\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2} \right] \right) g^{-1}(x) < x \Leftrightarrow x < g(x) \text{ (car } g \text{ est strictement croissante et } g(g^{-1}(x)) = x$$

$$\Leftrightarrow x < \text{Arctan}(\sqrt[3]{x} + \tan x)$$

$$\Leftrightarrow \tan x < \sqrt[3]{x} + \tan x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{x} > 0$$

Donc l'ensemble des solutions de l'inéquation $g^{-1}(x) < x$ est l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2} \right]$.

Exercice 2

Soit la fonction définie sur l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2} \right]$ par : $f(x) = \frac{1}{\sin x}$

1- Montrer que f est une bijection de $\left[0; \frac{\pi}{2} \right]$ sur un intervalle J qu'on déterminera

Notons f^{-1} la fonction réciproque de f

2- a) Etudier la dérivabilité de f^{-1} à droite en 1.

b) Montrer que f^{-1} est dérivable sur $]1; +\infty[$

c) Exprimer $f'(x)$ en fonction de $f(x) = \frac{1}{\sin x}$

d) Déterminer $(f^{-1})'(x)$ pour tout $x \in]1; +\infty[$.

Corrigé

1- La fonction f est l'inverse de la fonction : $x \mapsto \sin x$

La fonction $x \mapsto \sin x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et en particulier sur l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2} \right]$ et

$$\left(\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2} \right] \right) ; \sin x \neq 0$$

$$\text{Donc la fonction est dérivable sur } \left[0; \frac{\pi}{2} \right] \text{ et } f'(x) = \frac{-(\sin x)'}{\sin^2 x}$$

$$= -\frac{\cos x}{\sin^2 x} \leq 0 \text{ sur } \left[0; \frac{\pi}{2} \right]$$

Donc f est strictement décroissante sur $\left[0; \frac{\pi}{2} \right]$

Puisque f est dérivable et strictement décroissante sur $\left[0; \frac{\pi}{2} \right]$ alors f est une bijection de

$$\left[0; \frac{\pi}{2} \right] \text{ vers } f\left(\left[0; \frac{\pi}{2} \right]\right) = [1; +\infty[$$

$$\blacktriangleright f\left(\left]0;\frac{\pi}{2}\right]\right) = \left[f\left(\frac{\pi}{2}\right); \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \right[= [1; +\infty[$$

(car : $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sin x} = +\infty$)

2- a) Etudions la dérivabilité de f^{-1} à droite en 1.

$$\text{On a : } f^{-1}(1) = x \Leftrightarrow f(x) = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sin x} = 1$$

$$\Leftrightarrow \sin x = 1$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}$$

Et $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$; donc f^{-1} n'est pas dérivable à droite en 1.

$$b) x \in]1; +\infty[\Leftrightarrow f^{-1}(x) \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[\text{ et } f'(x) \neq 0 \text{ sur } \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$$

Donc f^{-1} est dérivable sur $]1; +\infty[$ et on a pour tout $x \in]1; +\infty[: (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

$$\begin{aligned} c) \text{ On a pour tout } \left]0; \frac{\pi}{2}\right[: f'(x) &= -\frac{\cos x}{\sin^2 x} \\ &= -\frac{\sqrt{1 - \sin^2 x}}{\sin^2 x} \\ &= -\frac{\sin x \sqrt{\frac{1}{\sin^2 x} - 1}}{\sin^2 x} \\ &= -\frac{1}{\sin x} \sqrt{\frac{1}{\sin^2 x} - 1} \\ &= -f(x) \sqrt{(f(x))^2 - 1} \end{aligned}$$

d) pour tout $x \in]1; +\infty[$; on a :

$$\begin{aligned} (f^{-1})'(x) &= \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \\ &= \frac{1}{-f(f^{-1}(x)) \sqrt{(f(f^{-1}(x)))^2 - 1}} \\ &= \frac{1}{-x \sqrt{x^2 - 1}} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } (\forall x \in]1; +\infty[) : (f^{-1})'(x) = \frac{1}{-x \sqrt{x^2 - 1}}$$