guessmaths

Exercice 1 :

Ecrire à l'aide des quantificateurs les propositions suivantes, étudier leurs valeurs de vérité :

1) Pour tout entier relatif n il existe un entier relatif m tel que : $n=3m$.
2) Pour tous réels x et y il existe un unique rationnel z tel que : $x+y=z$.
3) Il existe un nombre réel w tel que pour tout réel x : $x\leq w$.
4) Tout nombre rationnel est quotient de deux entiers relatifs.
5) Pour tout réel m l'équation $x^2-2mx-1=0$ admet une solution dans $\mathbb{R}$.

Exercice 2 :

1). Soient les assertions suivantes :

(a) $(\forall x\in[0;+\infty[):\ \sqrt{x}\leq x$.

(b) $(\exists x\in\mathbb{R}):\ x^2=-7x$.

(c) $(\forall a\in\mathbb{R})(\forall b\in\mathbb{R}):\ a^2+4b^2\geq 4ab$.

(d) $(\forall x\in\mathbb{R}):\ x^2\geq\dfrac{1}{4}$ ou $x\notin[-2;2]$.

(e) $(\forall x\in\mathbb{R})\ (\exists y\in\mathbb{R})\ :\ x=\dfrac{3y+5}{7y}$.

2) a)- Les assertions (a) (b)(c)(d),(e) sont-elles vraies ou fausses ?
b)- Donner leurs négations.

3) A et B deux parties de $\mathbb{N}$ .Ecrire en utilisant les quantificateurs les assertions: $A=\varnothing$, $A\cap B=\varnothing$, $A\subset B$, $A\not\subset B$

Exercice 3:

Soient les quatre assertions suivantes :

(a) $(\exists x\in\mathbb{Z})\ (\exists y\in\mathbb{Z}):2x-3y=\sqrt{2}$

(b) $(\forall x\in\mathbb{R})\ (\exists y\in\mathbb{R}):\ x+y>0$

(c) $(\exists x\in\mathbb{R})\ (\forall y\in\mathbb{R}):\ x+y>0$

(d) $(\exists y\in\mathbb{R})\ (\forall x\in\mathbb{R}):\dfrac{2x}{1+x^2}\leq y$

1.- Les assertions (a) (b),(c),(d) sont-elles vraies ou fausses ?.
2)- Donner leurs négations.

Exercice 4 :

Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Ecrire à l'aide des quantificateurs les expressions suivantes et donner leur négation:
1) «f est strictement décroissante >>
2) « la courbe de la fonction f rencontre l'axe des abscisses ».
3) Les courbes (C_f) et (C_g) se rencontrent en un point du plan.
4) On considère la droite (D) d'équation : $y=2x+1$.
« La courbe de f est au-dessus de la droite (D) et celle de g est au-dessous de la même droite».
5) On considère les deux droites (D) et (H) d'équations respectives $y=x+2$ et $y=4x-5$.

« la courbe de f rencontre les deux droites (D) et (H) ».

6) « tout élément de $\mathbb{R}$ admet un antécédent dans $\mathbb{R}$ par la fonction g».

Raisonnement par implication contraposée

Exercice 5 :

1). Montrer que: $(\forall x \in \mathbb{R})\ (\forall y \in \mathbb{R}):\ x^2y - xy^2 + y - x = (xy-1)(x-y)$

2)- Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R})\ (\forall y \in \mathbb{R}):\ (xy-1)(x-y) \neq 0 \Rightarrow x(y^2+y+1) \neq y(x^2+x+1)$

Exercice 6 :

1)- Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R} - \{1\})\ (\forall y \in \mathbb{R} - \{1\}):\ x \neq y \Rightarrow \dfrac{x+1}{x-1} \neq \dfrac{y+1}{y-1}$

2) Montrer que: $(\forall x \in \mathbb{R})\ (\forall y \in \mathbb{R}): x \neq 1\ et\ y \neq 1 \Rightarrow 1 + xy \neq x + y$

3)- Prouver que : $(\forall n \in \mathbb{N}):\ n^2$ est pair $\Rightarrow$ n est pair.

4)- Soient a et b deux réels strictement positifs.

Prouver que : **(1)** $a + b < c \Rightarrow \left(a < \dfrac{c}{2}\ ou\ b < \dfrac{c}{2}\right)$ **(2)** $ab < c \Rightarrow \left(a < \sqrt{c}\ ou\ b < \sqrt{c}\right)$

Raisonnement par équivalences successives

Exercice 7 :

1)- Prouver que: $(\forall a \in \mathbb{R}_+^*): a + \dfrac{1}{a} \geq 2$

2)- Soit x un réel.

Montrer que: $x = \sqrt{2}\ ou\ x = -\sqrt{2} \Leftrightarrow \dfrac{2}{\sqrt{x^2+2}} = 1$

Exercice 8 :

1)- Montrer que: $(\forall a \in \mathbb{R})\ (\forall b \in \mathbb{R}): \dfrac{3a-b}{2a+b} = -6 \Leftrightarrow a = -\dfrac{1}{3}b$

2)- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $\sqrt{x+5} \geq 4x - 1$.

3)- Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-1} - 1}{3x-5}$

4)- Montrer que: $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leq \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$

Raisonnement par disjonction des cas

Exercice 9 :

1)- Ecrire l'expression suivante sans valeur absolue à l'aide d'un tableau de signes : $(x \in \mathbb{R})$; $|2x-1| + |3x+4|$.

2)- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $|2x-1| + |3x+4| = 7$.

Exercice 10 :

1)- Montrer que la somme de deux entiers naturels de même parité est pair.

2)- Soit n un entier naturel. Prouver que n^3-n est divisible par 3

Exercice 11:

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=mx^2-mx+2$ avec m un paramètre non nul.
Dresser le tableau de variation de la fonction f.

Raisonnement par l'absurde

Exercice 12:

1) Montrer que: $(\forall a\in\mathbb{R}_+^*):\sqrt{1+a}\neq 1+\frac{a}{2}$

2) Soit n un entier tel que n^2 n'est pas un multiple de 16.

Montrer que $\frac{n}{2}$ n'est pas un entier pair.

3) Soient x et y deux réels positifs distincts.

Prouver que $x^2+3x+1\neq y^2+3y+1$.

Raisonnement par récurrence

Exercice 13:

1) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n l'entier $3^{2n}-2^n$ est divisible par 7.

2) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n l'entier n^3-n est divisible par 6.

3) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n l'entier $4^n+15n-1$ est divisible par 9.

Exercice 14:

1)- Montrer que: $(\forall n\in\mathbb{N})$; $3^n\geq 1+2n$.

2)- Montrer que: $(\forall n\in\mathbb{N}-\{0;1;2;3\})$; $2^n\geq n^2$

3)- Soit a un réel strictement positif.

Prouver que: $(\forall n\in\mathbb{N})$; $(1+a)^n\geq 1+an$.

Exercice 15 :

1)- Prouver que: $(\forall n\in\mathbb{N})$; $1\times2+2\times3+3\times4+......+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

2)- Prouver que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$; $1\times2^1+2\times2^2+3\times2^3+...+n\times2^n=(n-1)\times2^{n+1}+2$

3). Prouver que: $(\forall n\in\mathbb{N}-\{0;1\})$; $\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\ ......\times\left(1-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}$

4)- Prouver que $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$; $\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\ ......+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$

5)- Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$; $\frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{2\times3\times4}+\frac{1}{3\times4\times5}+.........+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$

Exercice 16 :

On dispose de 9 pièces de 1 DH dont une seule est fausse et plus lourde que les autres.
Montrer qu'on peut la détecter en utilisant une balance de type

Roberval en effectuant exactement deux pesées.

Exercice 17

1) Montrer que: $(\forall n \in \mathbb{N})$; $3 \text{ divise } n \Leftrightarrow 3 \text{ divise } n^2$.

2) Déduire que $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

3) Montrer que $\sqrt{3}+\sqrt{7} \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 18 :

1)- Déterminer l'ensemble de définition de la fonction définie par: $\begin{cases} f(x)=x+\sqrt{x+3} & ; x \geq 1 \\ f(x)=\dfrac{\sqrt{1-x}+6}{2x} & ; x<1 \end{cases}$

2). On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=|x-1|+3|2x+1|-|3-x|$

a) Ecrire $g(x)$ sans valeur absolue pour tout x de $\mathbb{R}$

b) Résoudre l'équation $g(x)=0$.

3)- Soient U et V deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} U(x)= x-1 ;\ x<2 \\ U(x)= x^2-4 ;\ x \geq 2 \end{cases}$; $\begin{cases} V(x)= x-2 ;\ x<3 \\ V(x)= 2x+1 ;\ x \geq 3 \end{cases}$

a)- Calculer $(U+V)(1)$; $(U+V)\left(\dfrac{5}{2}\right)$ et $(U+V)(7)$.

b)- Calculer $(U+V)(x)$ pour tout x dans $\mathbb{R}$.

Exercice 19 :

1)- Soient a,b,c et d des rationnels, soit λ un nombre non rationnel.

a) Montrer que: $(a+\lambda b=c+\lambda d) \Leftrightarrow (a=c \text{ et } b=d)$

b)- Application

Ecrire le nombre $\sqrt{12+6\sqrt{3}}$ sous forme $x+y\sqrt{3}$, avec x et y des rationnels.

2)- Soient x, y, a et b des réels strictement positifs.

a)- Montrer que: $2\sqrt{xy} \leq x+y$

b)- Montrer que : $4\sqrt{ab} \leq (1+a)(1+b)$

Exercice 20

1) Montrer les deux inégalités : $(1)\ (\forall x>0)(\forall y>0); \sqrt{xy} \leq \dfrac{x+y}{2}$ $\qquad (2)\ (\forall x>0)(\forall y>0); \dfrac{2}{\sqrt{xy}} \leq \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$

2) Soient x et y deux réels strictement positifs et n un entier naturel tel que : $x+y=1$.

Montrer que : $(xy)^n \leq \dfrac{1}{4^n}$ et que : $2 \times 2^n \leq \dfrac{1}{x^n}+\dfrac{1}{y^n}$

3) Déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N})(\forall x>0)(\forall y>0);\ x+y=1 \Rightarrow \left(1+\dfrac{1}{x^n}\right)\left(1+\dfrac{1}{y^n}\right) \geq (1+2^n)^2$