Exercices sur les suites

EXERCICE 1 :

On considère deux réels a et b tels que : $0 < a < b$, *et les deux suites* (u_n) *et* (v_n) *définies par :*

$$u_0 = a \ , \ v_0 = b \ , u_{n+1} = \frac{2}{\frac{1}{u_n} + \frac{1}{v_n}} \quad et \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \ ;$$

(rappel : u_{n+1} *est la moyenne harmonique de* u_n *et* v_n *;* v_{n+1} *est la moyenne arithmétique de* u_n *et* v_n*) .*

Le but du problème est de montrer que les deux suites sont adjacentes, de trouver leur limite commune et d'en déduire des approximations de réels par des rationnels.

a) Montrer que, pour tout entier naturel n, u_n *et* v_n *sont strictement positifs.*

b) Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_n < v_n$.

c) Montrer que, pour tous réels x et y tels que $0 < x < y$ *, on a :* $\frac{y-x}{2(x+y)} < \frac{1}{2}$ *. En déduire que*

$$v_{n+1} - u_{n+1} < \frac{1}{2}(v_n - u_n).$$

e) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n > 0$*, on a :* $v_n - u_n < \left(\frac{1}{2}\right)^n (b-a)$.

f) En déduire la limite de $(v_n - u_n)$.

g) Montrer que les suites (u_n) *et* (v_n) *sont adjacentes.*

h) Montrer que, pour tout entier naturel n, le produit $(v_n \times u_n)$ *est constant.*

En déduire la limite des suites (u_n) *et de* (v_n)*.*

i) Donner alors un encadrement de $\sqrt{6}$ *par deux rationnels au cent millième près.*

EXERCICE 2 :

Soit la suite récurrente $(u_n)_{n\in IN}$ *définie par :* $u_n = \frac{2+\cos n}{3-\sin\sqrt{n}}$ $(\forall n \in IN)$

Montrer que $(u_n)_{n\in IN}$ *est bornée*

Solutions :

Soit $n \in IN$ *on a :* $-1 \le \cos n \le 1$ *et* $-1 \le \sin n \le 1$

donc : $1 \le 2 + \cos n \le 3$ *et* $-1 \le \sin\sqrt{n} \le 1$

$\Rightarrow 1 \le 2 + \cos n \le 3$ *et* $2 \le 3 - \sin\sqrt{n} \le 4$

$\Rightarrow 1 \le 2 + \cos n \le 3$ *et* $\frac{1}{4} \le \frac{1}{3-\sin\sqrt{n}} \le \frac{1}{2}$

D'où : $\frac{1}{4} \le \frac{2+\cos n}{3-\sin\sqrt{n}} \le \frac{3}{2}$

càd : $\frac{1}{4} \le u_n \le \frac{3}{2}$

par suite : $(u_n)_{n\in IN}$ *est bornée.*