EXERCICE 1:

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x)=2e^{-x}-e^{-2x}$

On note C la courbe de f dans un repère orthonormé et $D: y=x$

1) a) Etudier les variations de f

b) Construire C et D

2) a) Montrer que g définie sur $[0;+\infty[$ par : $g(x)=f(x)-x$ est strictement décroissante sur $[0;+\infty[$

b) En déduire que $f(x)=x$ admet une seul solution α dans $[0;+\infty[$ et que $\frac{1}{2}\leq\alpha\leq1$.

c) Montrer que pour tout x de $\left[\frac{1}{2};1\right]$ on a : $f(x)\in\left[\frac{1}{2};1\right]$

d) Montrer que si $0\leq u\leq1$ alors $0\leq u(1-u)\leq\frac{1}{4}$.

En déduire que pour tout x de $\left[\frac{1}{2};1\right]$ on a : $|f'(x)|\leq\frac{1}{2}$.

3) On considère la suite (U_n) définie par : $U_0=\frac{1}{2}$ et $U_{n+1}=f(U_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

a) En utilisant l'inégalité des accroissements finis montrer que : $|U_{n+1}-\alpha|\leq\frac{1}{2}|U_n-\alpha|$

b) En déduire que $|U_n-\alpha|\leq\left(\frac{1}{2}\right)^n$

c) Montrer que (U_n) convergente vers α.

EXERCICE 2:

Soit la fonction f définie sur IR par : $f(x)=\frac{1}{2}\ln(1+e^{-x})$ On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1- a) Montrer que f est dérivable sur IR et pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=-\frac{1}{2}\times\frac{1}{1+e^{x}}$.

b) Etudier les variations de f.

c) Montrer que la droite $\Delta: y=-\frac{1}{2}x$ est une asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$.

d) Etudier la position relative de (C) et Δ.

e)Tracer (C) et Δ dans le repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ 2- Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet dans IR une unique solution α et que $0<\alpha<1$.

3- a) Montrer que pour tout $x\geq0$, $|f'(x)|\leq\frac{1}{4}$.

b) En déduire que pour tout $x\geq0$, $|f(x)-\alpha|\leq\frac{1}{4}|x-\alpha|$.

4. Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_0=0$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$,$U_{n+1}=f(U_n)$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, U_n \geq 0$.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4}|U_n - \alpha|$.

c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$ et calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

EXERCICE 3:

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x) = \frac{e^{2x}}{1+e^x}$ et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Partie A

1. Dresser le tableau de variation de f.
2. a) Déterminer les branches infinies de (C).
   b) Tracer (C)
3. a) Montrer que f est une bijection de IR vers IR_+^*.
   b) Tracer la courbe (C') représentative de la fonction réciproque f^{-1} de f.
   c) Calculer $f^{-1}(x)$ pour $x > 0$.
4. a) Vérifier que pour tout réel x, on a : $f(x) = e^x - \frac{e^x}{1+e^x}$.
   b) Soit λ un réel strictement négatif. Calculer l'aire $A(\lambda)$ du domaine limité par la courbe (C'), l'axe des ordonnées et les droites d'équations $y = \lambda$ et $y = 0$.

Partie B

Pour tout entier naturel non nul n et pour tout réel négatif, on pose : $F_n(x) = \int_x^0 \frac{e^{nt}}{1+e^t}\, dt$.

1. a) Calculer $F_1(x)$ et déduire que $\lim\limits_{x \to -\infty} F_1(x) = \ln 2$.
   b) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} F_2(x)$.
2. a) Montrer que pour tout entier naturel non nul n, on a : $F_{n+1}(x) + F_n(x) = \frac{1}{n}\left(1 - e^{nx}\right)$.
   b) Montrer par récurrence sur n, que $F_n(x)$ admet une limite finie lorsque x tend vers $-\infty$.

Dans la suite, on pose $R_n = \lim\limits_{x \to -\infty} F_n(x)$.

3. a) Vérifier que pour tout réel $t \leq 0$, $2e^t \leq 1 + e^t \leq 2$.
   b) Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 0$ et pour tout réel $x \leq 0$, on a :
   $\frac{1}{2n}\left(1 - e^{nx}\right) \leq F_n(x) \leq \frac{1}{2(n-1)}\left(1 - e^{(n-1)x}\right)$.
   c) En déduire un encadrement de R_n pour $n \geq 2$.
4. Pour tout réel négatif x et pour tout entier naturel non nul, on pose : $G_n(x) = (-1)^n \int_x^0 e^{nt}\, dt$.
   a) Calculer $G_n(x)$ et montrer que $\lim\limits_{x \to -\infty} G_n(x) = \frac{(-1)^n}{n}$.
   b) Montrer que $G_1(x) + G_2(x) + \dots + G_n(x) = -F_1(x) + (-1)^n F_{n+1}(x)$.
5. On pose, pour tout entier naturel non nul $n, U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$

a) *Montrer que pour tout entier naturel non nul n ;* $U_n = \ln 2 + (-1)^{n+1} R_{n+1}$.

b) *Montrer que la suite* (U_n) *est converge et trouver sa limite.*

<u>EXERCICE 4:</u>

A- Soit g la fonction définie sur IR par : $g(x) = 3x + \sqrt{9x^2+1}$ *et* (C_g) *sa courbe représentative dans un repère orthonormé.*

1) a- Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ *et montrer que la droite d'équation y = 6x est une asymptote à* (C_g).

b- Montrer que l'axe des abscisses est une asymptote à (C_g) *en* $-\infty$.

2) Vérifier que g est strictement croissante sur IR.

3) Tracer la courbe (C_g).

B- Soit f la fonction donnée par $f(x) = \ln(g(x))$ *et* (C_f) *sa courbe représentative dans un autre repère orthonormé* $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) a- Justifier que le domaine de définition de f est IR .

b- Calculer $f(x) + f(-x)$ *et prouver que O est un centre de symétrie de* (C_f).

2) a- Vérifier que $f'(x) = \dfrac{3}{\sqrt{9x^2+1}}$.

b- Ecrire une équation de la tangente (d) *en O à* (C_f)

c- Montrer que O est un point d'inflexion de (C_f).

3) a- Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ *et vérifier que* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$.

Déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

b- Dresser le tableau de variations de f.

4) a- Tracer la droite (d) *et la courbe* (C_f) *dans le repère* $(O;\vec{i};\vec{j})$.

b- L'équation $f(x) = x$ *admet trois racines dont l'une* α *est positive. Montrer que* $2,7 < \alpha < 2,9$.

5) a- Démontrer que la fonction f admet sur son domaine de définition une fonction réciproque h et tracer sa courbe représentative (C_h) *dans le repère orthonormé* $(O;\vec{i};\vec{j})$.

b- Montrer que $h(x) = \dfrac{1}{6}\left(e^x - e^{-x}\right)$.

6) On suppose que $\alpha = 2,8$ *;*

Calculer l'aire des deux régions du plan limitées par les deux courbes (C_f) *et* (C_h).

www.guessmaths.co E-mail : abdelaliguessouma@gmail.com whatsapp : 0604488896