Exercice1

1) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R})$; $|\sin x| \leq x$.

2) On considère la suite (α_n) définie par : $\alpha_n = \dfrac{n^2}{2^n}$

Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}$; puis déduire: $(\exists p \in \mathbb{N}^*)$ /$\forall n \geq p$; $\alpha_{n+1} \leq \dfrac{3}{4}\alpha_n$.

3) On considère la suite (w_n) définie par : $w_n = \sum\limits_{k=0}^{n} k^2 \sin\left(\dfrac{\pi}{2^k}\right)$

a) Etudier la monotonie de (w_n).

b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $w_n \leq \pi \sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k$

c) Montrer que (w_n) est convergente.

Exercice 2

1) Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\varphi(x) = \pi + a\sin x$; tel que : $0 < |a| < 1$

Montrer que : $(\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2)$; $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq |a| \times |x - y|$ et vérifier que : $\varphi(\pi) = \pi$.

2) Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 \in \mathbb{R}$ et $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_{n+1} = \varphi(u_n)$

Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $|u_n - \pi| \leq |a|^n \times |u_0 - \pi|$; Puis déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

Exercice 3

1) pour tout $n \in \mathbb{N}$; montrer que : $\exists! x_n \in \left]\dfrac{\pi}{2} + n\pi ; \dfrac{\pi}{2} + (n+1)\pi\right[$ /$\tan x_n = x_n$.

2) On considère la suite (u_n) définie par : $u_n = \dfrac{\pi}{2} + (n+1)\pi - x_n$

a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $x_n = (n+1)\pi + \text{Arctan} x_n$

b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $x_n \geq (2n+1)\dfrac{\pi}{2}$ puis déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.

c) Montrer que (u_n) est convergente puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

d) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$; $v_n = n \times u_n$; calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$

Exercice 4

On considère le suite (a_n) définie par : $a_n = \left(1 - \tan\dfrac{\pi}{7}\right)^n$

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k$

1) Montrer que (S_n) est convergente, puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

2) On considère le site (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \operatorname{Arctan}(a_n + \tan u_n) \end{cases} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[$.

b) Montrer que (u_n) est convergente

c) Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{5\pi}{14}$.

Exercice 5

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_n = \sum\limits_{k=0}^{2n+1}\left(\frac{n}{n^2+k}\right)$

1) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $\frac{2n}{n+1} \leq u_n \leq \frac{2n+2}{n}$; puis calculer : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; on pose : $v_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}\right)$ et $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$

a) Montrer que: $(\forall k \in \mathbb{N}^*)$; $\frac{1}{2k} \leq \sqrt{k} - \sqrt{k-1}$ puis déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $v_n \leq 2\sqrt{n}$

b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $2n + 2 - 2v_{n+1} \leq S_n \leq 2n + 2v_n$

c) Déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $2n - 4\sqrt{n+1} \leq S_n \leq 2n + 4\sqrt{n}$

3) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{S_n}{n}\right)$