

Exercice 1:

Soient a et b deux réels tels que : $a^2 + b^2 = 1$.

Montrer que : $|a + b| \leq 2$.

Exercice 2:

Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}); 1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{n-1} = \frac{3^n - 1}{2}$.

Exercice 3

Montrer par récurrence que : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) (\forall n \in \mathbb{N}); (1+x)^n \geq 1+nx$

Exercice 4

Soient $x; y$ et z des nombres réels non nuls; tels : $xy + yz + xz = 0$

Montrer que : $\frac{x+y}{z} + \frac{y+z}{x} + \frac{x+z}{y} = -3$

Exercice 5

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $\sqrt{x^2 + mx - 1} = -x + 3m$; (avec $m \in \mathbb{R}$)

Exercice 6

Montrer que $(\forall a > 0); (\forall b > 0)$ tels que : $a + b = 1$; on a : $\left(1 + \frac{1}{a}\right)\left(1 + \frac{1}{b}\right) \geq 9$.

Exercice 7

Soient (P) et (Q) les deux propositions suivantes :

$$(P): " (\exists x \in \mathbb{R}^+) / \sqrt{1+x} = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$$

$$(Q): " (\forall y \in \mathbb{R}); (\exists x \in \mathbb{R}) / \frac{x}{1+x^2} < y$$

1) Donner la négation de (P) et de (Q) .

2) Montrer que (P) est vraie et que (Q) est fausse

3) Dédurre la valeur de vérité de la proposition suivante :

$$(R): (\exists y \in \mathbb{R}); (\forall x \in \mathbb{R}^+) \left(\frac{x}{1+x^2} \geq y \right) \Rightarrow \sqrt{x+1} \neq \frac{1}{\sqrt{x+1}}$$

Exercice 8

Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*); \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{n \times (n+1)} = \frac{n}{n+1}$

Exercice 9

Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}); n^3 - n$ est divisible par 6.

Exercice 10

Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}); n^2 + 1$ n'est pas divisible par 3.

Exercice 11

Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}); \sqrt{x^2 + 1} + \frac{1}{2}(x + 2) > 0$

Exercice 12

Soit x un réel positif

1) Montrer que : $\sqrt{2x+2} - \sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow x = 1$

2) Montrer que : $0 \leq \frac{x}{x^2 + x + 1} \leq \frac{1}{3}$

3) Montrer que : $\frac{\sqrt{x}}{x^2 - x + 1} \leq \frac{4}{3}\sqrt{x}$

Exercice 13

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

•) $\sqrt{5-x} + 3x - 2 > 0$

•) $|2x - 2| < \frac{x}{2}$

Exercice 14

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $\sqrt{x^2 + 3x - 4} - (x + 1) < 0$

Exercice 15

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $x - 1 \leq \sqrt{x + 5}$

Exercice 16

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$; on a : $\sqrt{1 + x^2} - x > 0$.

Exercice 17

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\sqrt{3-x} = x + 1$.

Exercice 18

On pose $I = [2; +\infty[$

1) Soit a et b deux éléments de I ; tels que : $ab = a + b$.

2) Montrer par l'absurde que : $a = 2$ (remarquer que : $ab - a - b = (a - 1)(b - 1) - 1$)

b) En déduire la valeur de b .

2) Montrer que : $(\forall a \in I); (\forall b \in I): [a \neq b \Rightarrow \frac{a-1}{a^2-2a+2} \neq \frac{b-1}{b^2-2b+2}]$