Arithmétique

Prof:Haddar
2SM.BIOF

EXERCICE 1:

Soient a et b deux entiers naturels non nuls.

1) *Montrer* : $a \wedge b = 1 \Leftrightarrow (a+b) \wedge (a^2+ab+b^2) = 1$.

2) *Determiner a et b tels que:* $a \wedge b = 1$ *et* $\dfrac{a+b}{a^2+ab+b^2} = \dfrac{7}{37}$.

EXERCICE 2:

On considère dans $\mathbb{N}^2$ *l'équation* (E) : $2^x - 3^y = 1$.

1) *Soit* (x, y) *un couple solution de* (E) *tel que* $x > 2$.

a- *Montrer que* : $2^x \equiv 1[9]$ *et en déduire que* : $6 / x$.

b- *Montrer que* : $63 / 2^x - 1$.

2) *En déduire l'ensemble des solutions de l'équation* (E) .

EXERCICE 3:

On considère dans $\mathbb{Z}^2$ *l'équation* (E) : $42x + 5y = 2$.

1) a- *En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer une solution particulière de l'équation* (E)

b- *Résoudre l'équation* (E) .

2) *Résoudre dans* $\mathbb{Z}^2$ *l'équation* : $(42x + 5y - 3)(42x + 5y + 3) = -5$.

EXERCICE 4:

1) *Montrer que les nombres* $14n + 3$ $5n + 1$ *sont premiers entre eux pour tout n de* $\mathbb{Z}$

2) *Résoudre dans* $\mathbb{Z}^2$ *l'équation* : $87x + 31y = 2$ (E) .

a- *Vérifier que les nombres 87 et 31 sont premiers entre eux , et en déduire une solution particulière de l'équation:* $87x + 31y = 1$ *où* $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$

b- *Résoudre dans* $\mathbb{Z}^2$ *l'équation* (E) .

EXERCICE 5:

On considère dans $\mathbb{Z}^2$ *l'équation* (E) : $n^3x + (n+1)y = 1$ *où* $n \in \mathbb{N}^*$.

1) *Montrer que l'équation* (E) *admet au moins une solution dans* $\mathbb{Z}^2$.

2) *Résoudre dans* $\mathbb{Z}^2$ *l'équation* (E)

EXERCICE 6 :

Résoudre dans $\mathbb{Z}$ *les systèmes : (1)* $\begin{cases} x \equiv 2[6] \\ x \equiv 7[13] \end{cases}$ *et (2)* $\begin{cases} x \equiv 2[6] \\ x \equiv 7[13] \\ x \equiv 1[7] \end{cases}$

EXERCICE 7 :

On considère dans $\mathbb{Z}^2$ *l'équation* (E) : $31x^2 - 27y^2 = 5$.

1) *On suppose que* (x, y) *est solution de l'équation* (E) .

a- *Montrer que* : $x^2 \equiv 2y^2[5]$.

b- *Montrer que pour tout a de* $\mathbb{Z}$, *on a* : $a^2 \equiv 0[5]$ *ou* $a^2 \equiv 1[5]$ *ou* $a^2 \equiv 4[5]$.

c-*En déduire que* : $5 / x$ *et* $5 / y$.

2) *Soit* (x, y) *un élément de* $\mathbb{Z}^2$ *tel que* : $5 / x$ و $5 / y$

Montrer que (x, y) *n'est pas solution de l'équation* (E) .

3) *En déduire l'ensemble des solutions de l'équation* (E) .

4) *Montrer que pour tout k de* $\mathbb{Z}$, *les nombres* $x = 27k + 35$ *et* $y = 31k + 40$ *ne sont pas des nombres parfaits en même temps.*

EXERCICE 8 :

Soit n *un nombre entier relatif*

1) *Montrer que les nombres* $n+3$ *et* $2n^2+5n-2$ *sont premiers entre eux.*

2) *On pose :* $d_n=(n+3)\wedge(4n^2+11n+4)$ *. déterminer les valeurs possibles de* d_n .

3) *Soit* $A=\dfrac{(4n^2+11n+4)(2n^2+5n-2)}{n+3}$ *avec* $n\in\mathbb{Z}-\{-3\}$.

Déterminer les valeurs de n pour lesquelles $A\in\mathbb{Z}$.

EXERCICE 9 :

Montrer que $(\forall x\in\mathbb{Z}):\quad x^5\equiv x\,[30]$

EXERCICE 10 :

Montrer que pour tout n *de* $\mathbb{Z}$, $n^{13}-n$ *est divisible par* 2730 .

EXERCICE 11 :

Soient p *et* q *deux nombres entiers naturels premier distincts.*

Montrer que : $p^{q-1}+q^{p-1}\equiv 1[pq]$.

EXERCICE 12 :

1) *Montrer que :* $(\forall a\in\mathbb{Z})\ a^4\equiv 0[5]$ *ou* $a^4\equiv 1[5]$

2) *En déduire que l'équation* $x^4+781=3y^4$ *n'a pas de solutions dans* $\mathbb{Z}^2$.

EXERCICE 13 :

Soient p *et* n *deux nombres entiers naturels tels que :* p *est premier et* $n\wedge p=1$.

Montrer que : $n^{p(p-1)}\equiv 1\ [p^2]$.

EXERCICE 14 :

On pose : $A=\{0,1,2,.......,28\}$ *et on considère l'application* f *de A vers A qui transforme tout élément* x *de A en* $f(x)$ *le reste de la division euclidienne de* x^3 *par* 29 .

1) *a- Calculer* $f(4)$ *et* $f(17)$.

b- Montrer que les nombres 3 *et* 28 *sont premiers entre eux.*

2) *Montrer que* f *est injective.*

3) *Soient* x *et* y *deux éléments de A tels que* $x^3\equiv y\,[29]$. *Montrer que :* $x\equiv y^{19}\,[29]$.

EXERCICE 15 :

1) *Soit n un nombre entier relatif impair.*

a- Montrer que : $n\equiv 1[4]$ *ou* $n\equiv -1[4]$.

b- En déduire que : $n^{16}\equiv 1[64]$.

2) *Soit p un nombre premier tel que* $p\geq 19$.

Montrer que : $p^{16}-1$ *divisible par* 6320.

EXERCICE 16 :

1) *Soit p un nombre premier tel que* $p\geq 5$.

Montrer que : $p^2\equiv 1[24]$.

2) *Soit a nombre entier tel que :* $a\wedge 24=1$. *Montrer que :* $a^2\equiv 1[24]$

3) *Existe-ils des entiers* $a_1,a_2.....,a_{23}$ *tels que :* $\begin{cases}(\forall k\in\{1,2,.....,23\}) & a_k\wedge 24=1\\ \displaystyle\sum_{k=1}^{23}a_k^{\,2}=23997\end{cases}$? .

EXERCICE 17 :

On pose $n=\underbrace{999......9}_{330fois}$. *Montrer que n est divisible par* 331.

EXERCICE 18 :

1) On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $(\mathrm{E}):(x+1)^2=9+5y$.

a- Soit (x,y) solution de l'équation (E). Montrer que : $x\equiv 2[5]$ ou $x\equiv 1[5]$.

b- Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E).

2) Déterminer les couples (x,y) de $\mathbb{N}^2$ tels que : $\begin{cases}\overline{121}_{(x)}=\overline{59}_{(y)}\\ x\wedge y=8\\ x\equiv 1[5]\end{cases}$

EXERCICE 19 :

1) Montrer que le nombre 251 est un diviseur premier de 2008 et que : $10^{250}\equiv 1[251]$.

2) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$; on pose : $u_n=\overline{\underbrace{888.....88}_{n\ fois}}^{(10)}$.

a- Montrer que : $u_n=\frac{8}{9}(10^n-1)$ $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$.

b- Montrer que : $u_n\equiv 0[2008]\Leftrightarrow 10^n\equiv 1[251]$.

c- En déduire que le nombre 2008 admet un multiple qui s'écrit seulement avec le nombre 8 dans la base 10.

3) Montrer que $(10^{251}-1)\wedge(10^{15}-1)=9$, puis résoudre dans $\mathbb{Z}^2$: (E) $2008x-120y=8$

EXERCICE 20 :

1) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation : $\begin{cases}x\equiv 0[5]\\ x\equiv 5[7]\end{cases}$.

2) On considère le nombre n qui s'écrit dans la base 6 par : $n=\overline{\alpha 30002\beta}$.

Déterminer α و β pour que n soit divisible par 35.

EXERCICE 21 :

1) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $5x-3y=2$.

2) Soit A un nombre entier naturel tels que : $A=\overline{55}_{(x)}$ et $A=\overline{37}_{(y)}$.

Déterminer les valeurs possibles de x et y .

EXERCICE 22 :

Déterminer les entiers x ; y et z de $\mathbb{N}$ tels que : $\overline{xyz}^{(7)}=\overline{zyx}^{(11)}$

EXERCICE 23 :

On pose $N=\overline{1x1yxy}_{(10)}$.

Déterminer les entiers x et y pour que N soit divisible par 63.

EXERCICE 24 :

1) On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : (E) $20x-9y=2$.

a- Soit (x_0,y_0) une solution de l'équation (E) .

b- Montrer que y_0 est pair , puis déterminer les valeurs possibles de $x_0\wedge y_0$.

c- Déterminer les couples (x,y) solutions de l'équation (E) tels que $x\wedge y=2$.

2) On pose : $A=\overline{ya5}_{(6)}=\overline{xxa\,a}_{(4)}$.

Montrer que : $a+1\equiv 0[4]$, puis en déduire les valeurs de a , x et y .

EXERCICE 25 :

1) Montrer que le nombre 2011 est premier.

2) Résoudre dans $\mathbb{Z}/2011\mathbb{Z}$ l'équation (E): $x^2+\overline{2009}x-\overline{3}=\overline{0}$