<u>Exercice 1</u> (16,5 pts)

<u>Partie A :</u>

Soit g la fonction définie sur $[0;+\infty[$ *par :* $g(x)=2x-(1+x)\ln(1+x)$

1,5p *1) Étudier les variations de g et dresser son tableau de variation.*

1p *2) a-Montrer que l'équation* $g(x)=0$ *admet une unique solution* α *dans* $[e-1;+\infty[$

0,5p *b-Vérifier que* $3<\alpha<4$ *(On admet que* $e^3>4^2$ *et* $e^8>5^5$*)*

0,5p *3) En déduire le signe de g sur* $[0;+\infty[$.

<u>Partie B :</u>

On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ *par :* $\begin{cases} f(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}} & si\ x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$

Et soit (C) *sa courbe représentative dans un repère orthonormé* $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1pt *1) a- Montrer que f est continue à droite en* 0.

1pt *b- Calculer* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ *et interpréter graphiquement le résultat.*

1pt *c- Etudier la dérivabilité de f à droite en* 0 *et interpréter graphiquement le résultat.*

1,5pt *2) a-Montrer que f est dérivable sur* $]0;+\infty[$ *et que :* $(\forall x\in]0;+\infty[)$;

$$f'(x)=\frac{g(x)}{2x\sqrt{x}(1+x)}$$

1pt *b- En déduire le tableau de variation de f.*

0,5pt *3) Vérifier que :* $f(\alpha)=\dfrac{2\sqrt{\alpha}}{1+\alpha}$

1pt *4) Tracer la courbe* (C). *(On prend* $f(\alpha)\simeq 0,8$*)*

<u>Partie C :</u>

Soit n un nombre entier naturel non nul différent de 1.

1p *1) Montrer que l'équation* $f(x)=\dfrac{1}{n}$ *admet une unique solution* α_n *dans* $[0,\alpha]$.

1,25p *2) Montrer que la suite* $(\alpha_n)_{n\geq 2}$ *est décroissante et que* $(\alpha_n)_{n\geq 2}$ *est convergente.*

1,25p 3) On pose $\ell = \lim_{n\to+\infty} \alpha_n$. Montrer que $f(\ell) = 0$, puis déduire la valeur de ℓ.

1p 4) a-En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que : $(\forall x \in]0;1[)$;

$$\frac{x}{2} \le \ln(1+x) \le x$$

1p b- En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\})$; $\frac{1}{n^2} \le \alpha_n \le \frac{4}{n^2}$

0,5p c- Déduire une deuxième fois $\lim_{n\to+\infty} \alpha_n$

<u>Exercice 2</u> (03,5 pts).

Soit n un nombre entier naturel non nul.

1p 1) Montrer que l'équation $x - n + \frac{n}{2}\ln x = 0$ admet une unique solution x_n dans $]0;+\infty[$

0,75p 2) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $1 \le x_n \le e^2$

1,25p 3) Montrer que la suite $(x_n)_{n\ge1}$ est croissante et que $(x_n)_{n\ge1}$ est convergente.

0,5p 4) Montrer que : $\lim_{n\to+\infty} x_n = e^2$

<u>EXERCICE BONUS :</u>

Soient x et y deux nombres réels tels que $0 < x < y$

1p 1) Montrer que : $\frac{y-x}{\ln y - \ln x} < \frac{x+y}{2}$

1p 2) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)} < \frac{n(n+1)(4n+5)}{12}$