

de plus on a : $\begin{cases} x^{1440} \equiv 1 [31] \\ x^{1440} \equiv 1 [65] \end{cases}$ (2)

$$\Rightarrow \begin{cases} 31/x^{1440} - 1 \\ 65/x^{1440} - 1 \end{cases} \quad \text{et } 31 \wedge 65 = 1$$

$$\Rightarrow 31 \times 65 / x^{1440} - 1$$

$$\Rightarrow 2015 / x^{1440} - 1$$

$$\Rightarrow \boxed{x^{1440} \equiv 1 [2015]}$$

4) x est solution de : $x^{1439} \equiv 1436 [2015]$
et $x^{1440} \equiv 1 [2015]$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^{1439} \equiv 1436 [2015] \\ x^{1439} \times x \equiv 1436 \times x [2015] \end{cases}$$

$$\Rightarrow 1436 \times x \equiv 1 [2015]$$

$$\Rightarrow 2015 / 1436 x - 1$$

$$\Rightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}) / 1436x - 1 = 2015k$$

$$\Rightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}) / 1436x - (1436 \times 1051 - 2015 \times 749) = 2015k$$

$$\Rightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}) / 1436(x - 1051) = 2015(k - 749)$$

$$\Rightarrow 2015 / 1436(x - 1051) \quad \text{et comme } 2015 \wedge 1436 = 1$$

alors d'après Gauss : $2015 / x - 1051$

par suite : $\boxed{x \equiv 1051 [2015]}$

3) a) on a: $x \wedge 2015 = 1$

Donc d'après le théorème de Bézout

$$\exists (u, v) \in \mathbb{Z}^2 / u \cdot x + v \cdot 2015 = 1$$

$$\Rightarrow \exists (u, v) \in \mathbb{Z}^2 / u \cdot x + v \cdot 5 \cdot 13 \cdot 31 = 1.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \exists (u_1, v_1 = v \cdot 13 \cdot 31) \in \mathbb{Z}^2 / u_1 \cdot x + 5v_1 = 1 \\ \exists (u_2, v_2 = v \cdot 5 \cdot 31) \in \mathbb{Z}^2 / u_2 + 13v_2 = 1 \\ \exists (u_3, v_3 = v \cdot 13 \cdot 5) \in \mathbb{Z}^2 / u_3 + 31v_3 = 1 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow x \wedge 5 = 1 ; x \wedge 13 = 1 \text{ et } x \wedge 31 = 1.$$

•) D'après le ~~petit~~ théorème de Fermat

$$x^{5-1} \equiv 1 [5] \Rightarrow x^4 \equiv 1 [5]$$

$$\Rightarrow (x^4)^{360} \equiv 1^{360} [5]$$

$$\Rightarrow \boxed{x^{1440} \equiv 1 [5]}$$

$$\bullet) x^{13-1} \equiv 1 [13] \Rightarrow x^{12} \equiv 1 [13].$$

$$\Rightarrow (x^{12})^{120} \equiv 1^{120} [13].$$

$$\Rightarrow \boxed{x^{1440} \equiv 1 [13]}$$

$$\bullet) x^{31-1} \equiv 1 [31] \Rightarrow x^{30} \equiv 1 [31]$$

$$\Rightarrow (x^{30})^{48} \equiv 1^{48} [31]$$

$$\Rightarrow \boxed{x^{1440} \equiv 1 [31]}$$

b) on a d'après la question précédente :

$$\begin{cases} x^{1440} \equiv 1 [5] \\ x^{1440} \equiv 1 [13] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5 / x^{1440} - 1 \\ 13 / x^{1440} - 1 \end{cases}$$

et comme $5 \wedge 13 = 1$ alors : $5 \cdot 13 / x^{1440} - 1$

$$\text{Donc } 65 / x^{1440} - 1 ; \text{ Donc } \boxed{x^{1440} \equiv 1 [65]}$$

Exercice 2

(1)

$$\text{soit } x \in \mathbb{Z} / x^{1439} \equiv 1436 \pmod{2015}.$$

1. Sachant que : $1436 \times 1051 - 2015 \times 749 = 1$

alors $\exists (u=1051, v=-749) / u \times 1436 + v \times 2015 = 1$

donc d'après le théorème de Bézout $1436 \wedge 2015 = 1$.

2. soit d un diviseur commun de x et 2015

on a : $x^{1439} \equiv 1436 \pmod{2015} \Rightarrow 2015 / x^{1439} - 1436$

$$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} / x^{1439} - 1436 = 2015k$$

$$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} / 1436 = x^{1439} - 2015k$$

et d/x ; $d/2015 \Rightarrow d/x^{1439}$ et $d/2015k$ ($k \in \mathbb{Z}$)

$$\Rightarrow d/x^{1439} - 2015k \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Rightarrow d/1436.$$

b) soit $d = x \wedge 2015$

$$\text{alors } \begin{cases} d/x \text{ et } d/2015 \\ d/1436 \end{cases}$$

d'où $d/1436 \times 1051$ et $d/2015 \times 749$

$$\Rightarrow d/1436 \times 1051 - 2015 \times 749$$

$$\Rightarrow d/1.$$

$$\Rightarrow d=1 \text{ ou } d=-1 \text{ or } x \wedge 2015 > 0$$

$$\Rightarrow d=1$$

par suite $x \wedge 2015 = 1$

C'est x et 2015 sont premiers entre eux.