PROBLÉME (17 points)

Partie 1:

On considère la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x)=x^2-2+\ln(x)$.

1 pts 1) Calculer les limites : $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)$.

1 pts 2) Etudier les variations de la fonction g puis dresser son tableau de variation.

0,75 pts 3) a) Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]0;+\infty[$

1 pts b) Montrer que : $1<\alpha<\frac{3}{2}$; puis déterminons un encadrement de α de longueur 125×10^{-3}

0,75 pts 4) Déduire le signe de $g(x)=0$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

Partie 2 :

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=x+\frac{1}{x}-\frac{\ln(x)}{x}$

Et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

0,75 pts 1) Calculer : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, et interpréter géométriquement ce résultat.

1 pts 2) a) Calculer $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$, puis déterminer la branche infinie de (C_f) au voisinage de $+\infty$.

0,75 pts b) Etudier la position relative de (C_f) et l'asymptote oblique.

1,25 pts 3) Montrer que : $(\forall x\in]0;+\infty[)$: $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$; puis dresser le tableau de variation de f.

4) Soit h la restriction de f à $I=[\alpha;+\infty[$

0,5 pts a) Montrer que h admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer

0,75 pts b) Montrer que h^{-1} est dérivable en e puis calculer $(h^{-1})'(e)$.

0,5 pts 5) a) Vérifier que : $f(\alpha)=2\alpha-\frac{1}{\alpha}$

1,5 pts b) Tracer dans le même repère les courbes (C_f) et $(C_{h^{-1}})$. (On prend $\alpha\simeq 1,2$)

Partie 3 :

Soit (U_n) la suite définie par : $U_0=e^2$ et $(\forall n\in \mathrm{IN})$; $U_{n+1}=f(U_n)$.

0,75 pts 1) Montrer que : $(\forall n\in \mathrm{IN})$; $e\le U_n\le e^2$.

0,75 pts *2) Etudier la monotonie de la suite* (U_n).

1,25 pts *3) En déduire que la suite* (U_n) *est convergente puis déterminer* $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

0,75 pts *4) Calculer la limite de la suite* $(S_n)_{n\geq 1}$ *définie par :* $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n-1} \frac{\ln(U_k)-1}{U_k}$

Partie 4 :

Soit F la fonction primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0;+\infty[$ *et vérifiant* $F(1)=\frac{1}{2}$.

1 pts *1) Déterminer* $F(x)$ *pour tout x de* $]0;+\infty[$.

1 pts *2) Montrer que :* $F(\alpha)=\frac{\alpha^2}{2}(3-\alpha^2)$