Exercice 1 :(4 points)

Partie 1

On munit IR de la loi de composition interne $*$ définie par :

$(\forall(x,y)\in IR^2)\quad x*y = x+y-e^{xy}+1$

0.25 1- a) Montrer que la loi $*$ est commutative dans IR

0.50 b) Montrer que la loi $*$ admet un élément neutre que l'on déterminera.

0.50 2- Sachant que l'équation: $3+x-e^{2x}=0$ admet dans IR deux solutions distinctes a et b

Montrer que la loi $*$ n'est pas associative dans IR

Partie 2

On rappelle que $(M_2(IR),+,\times)$ est un anneau unitaire non commutatif d'unité $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ et

$(M_2(IR),+,.)$ est un espace vectoriel réel et que $(\mathbb{C}^*,\times)$ est un groupe commutatif.

Pour tout x et y réels, on pose : $M(x,y)=\begin{pmatrix}x&-2y\\ \frac{y}{2}&x\end{pmatrix}$ et soit $F=\{M(x,y)/(x,y)\in IR^2\}$

0.50 1- Montrer que F est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel réel $(M_2(IR),+,.)$

0.50 2- Montrer que F est stable dans $(M_2(IR),\times)$

3- On considère l'application j de $\mathbb{C}^*$ dans F qui associe à tout nombre complexe $x+iy$(Où x et y sont deux réels) la matrice $M(x,y)$.

0.50 a) Montrer que j est un homomorphisme de $(\mathbb{C}^*,\times)$ vers $(F,\times)$

0.25 b) On pose : $F^*=F-\{M(0,0)\}$.

Montrer que $j(\mathbb{C}^*)=F^*$

0.25 c) Montrer que $(F^*,\times)$ est un groupe commutatif.

0.75 4- Montrer que $(F,+,\times)$ est un corps Commutatif.

Exercice 2 : (3 points)

0.50 I -1) a étant un entier, montrer que si a et 13 sont premiers entre eux alors $a^{2016}\equiv 1\ [13]$

2) On considère dans l'équation $(E): x^{2015}\equiv 2\ [13]$ et soit x une solution de l'équation (E).

0.50 a) Montrer que x et 13 sont premiers entre eux.

0.50 b) Montrer que : $x\equiv 7\ [13]$

0.50 3) Montrer que l'ensemble des solutions de l'équation (E) est $S=\{7+13k\ /\ k\in\mathbb{Z}\}$

II - Une urne contient 50 boules portant les numéros de 1 à 50
(les boules sont indiscernables au toucher)

0.50 1- On tire au hasard une boule de l'urne.

Quelle est la probabilité d'obtenir une boule portant un numéro qui est solution de l'équation (E) ?

0.50 *2- On tire au hasard une boule de l'urne, on note son numéro, puis on la remet dans l'urne. On répète l'expérience précédente 3 fois .Quelle est la probabilité d'obtenir exactement deux fois une boule portant un numéro qui est solution de l'équation (E) ?*

Exercice 3 : *(3 points)*

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation suivante : $(E)\ : z^2-(1+i)z+2+2i=0$

0.25 *1 - a) Vérifier que $(1-3i)^2$ est le discriminant de l'équation (E)*

0.50 *b) Déterminer z_1 et z_2 les deux solutions de l'équation (E) dans l'ensemble $\mathbb{C}$ (on prendra z_1 imaginaire pur).*

0.50 *c) Montrer que: $\dfrac{z_1}{z_2}=\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$*

2 - Le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct.

On considère le point A d'affixe z_1 et le point B d'affixe z_2

0.25 *a) Déterminer le nombre complexe e affixe du point E milieu du segment $[AB]$*

0.50 *b) Soit r la rotation de centre A et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$ et c l'affixe du point C image du point E par la rotation r. Montrer que : $c=-\dfrac{3}{2}+\dfrac{3}{2}i$*

1 *c) On considère D le point d'affixe $d=1+\dfrac{3}{2}i$. Montrer que le nombre $\dfrac{z_2-d}{c-d}\times\dfrac{c-z_1}{z_2-z_1}$ est réel puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.*

Exercice 4 : *(6 points)*

Soit n un entier naturel non nul.

On considère la fonction f_n à variable réelle x définie sur IR par: $f_n(x)=\dfrac{1}{1+e^{-\frac{3}{2}(x-n)}}$.

Soit (C_n) la courbe représentative de la fonction f_n dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\ \vec{j})$.

0.75 *1 - a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x)$, puis interpréter graphiquement les résultats obtenus.*

0.75 *b) Montrer que la fonction f_n est dérivable IR sur puis calculer $f_n'(x)$ pour tout x de IR*

0.25 *c)Montrer que la fonction f_n est strictement croissante sur IR*

0.50 *2 - a) Montrer que le point $I_n\left(n;\dfrac{1}{2}\right)$ est le centre de symétrie de la courbe (C_n)*

0.50 *b) Construire la courbe (C_1)*

0.75 *c) Calculer l'aire de la surface plane limitée par la courbe et les droites d'équations $x=0$; $x=1$ et $y=0$*

0.75 3 - a) Pour tout x de IN^* montrer que l'équation $f_n(x)=x$ admet une solution unique u_n dans l'intervalle $]0;n[$

0.50 b) Montrer que : $(\forall n\in IN^*)(\forall x\in IR)\ f_{n+1}(x)<f_n(x)$

0.75 c) Monter que la suite (u_n) est strictement décroissante et en déduire qu'elle est convergente.

0.50 d) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

__Exercice 5:__ *(4 points)*

On considère la fonction g définie sur IR^* *par:* $g(x)=\int_x^{3x}\frac{\cos t}{t}\,dt$

0.50 1- Montrer que la fonction g est paire.

0.75 2- Montrer que la fonction g est dérivable sur $]0,+\infty[$ puis calculer $g'(x)$ pour $x>0$

0.50 3- a) En utilisant une intégration par parties, vérifier que:

$$\int_x^{3x}\frac{\cos t}{t}\,dt=\frac{\sin 3x-3\sin x}{3x}+\int_x^{3x}\frac{\sin t}{t^2}\,dt$$

0.75 b) Montrer que: $(\forall x>0)\ |g(x)|\le\frac{2}{x}$, puis en déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

0.50 4 - a) Montrer que: $(\forall x>0)\ 0\le\int_x^{3x}\frac{1-\cos t}{t}\,dt\le 2x$

(Remarquer que $((\forall\ t>0)1-\cos t\le t)$

0.50 b) Vérifier que: $(\forall x>0)\ \ g(x)-\ln 3=\int_x^{3x}\frac{\cos t-1}{t}\,dt$

0.50 c) En déduire $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$