Exercices « ordre dans IR »

Exercice 1 - *Pour réviser...*

Encadrer $x+y$; $x-y$; xy *et* $\frac{x}{y}$ *sachant que* $x\in[3;6]$ *et* $y\in[-4;-2]$.

Corrigé

1. *On a :* $3\le x\le 6$ *et* $-4\le y\le -2$. *En sommant ces inégalités, on en déduit que :* $-1\le x+y\le 4$.
2. *On a :* $3\le x\le 6$ *et* $2\le -y\le 2$. *En sommant ces inégalités, on en déduit que :* $5\le x-y\le 10$.
3. *On ne peut multiplier des inégalités que lorsqu'elles concernent des réels positifs. On va donc écrire* $3\le x\le 6$ *et* $2\le -y\le 4$. *En multipliant ces inégalités, on trouve* $6\le -xy\le 24$ *soit finalement l'encadrement* $-24\le xy\le -6$.
4. *On commence par remarquer que* $-\frac{1}{2}\le \frac{1}{y}\le -\frac{1}{4}$ *; donc :*

   $\frac{1}{4}\le -\frac{1}{y}\le \frac{1}{2}$.

   Et $3\le x\le 6$.

En multipliant les inégalités, il vient $\frac{3}{4}\le -\frac{x}{y}\le 3$ *soit finalement l'encadrement* $-3\le \frac{x}{y}\le -\frac{3}{4}$.

Exercice 2 - *Somme, produit, carré*

Soit a, b, c trois nombres réels.

1. *Démontrer que* $ab\le \frac{a^2+b^2}{2}$.
2. *Démontrer que* $ab+bc+ac\le a^2+b^2+c^2$.
3. *Démontrer que* $3ab+3bc+3ac\le (a+b+c)^2$.

Corrigé

1. *Il suffit de se rappeler que :* $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2\ge 0$. *Ceci donne immédiatement le résultat.*
2. *On applique trois fois la question précédente :*

$$ab\le \frac{a^2+b^2}{2}.$$

$$bc\le \frac{b^2+c^2}{2}.$$

$$ac\le \frac{a^2+c^2}{2}.$$

En sommant ces trois inégalités, on obtient bien l'inégalité demandée.

3. *On développe* $(a+b+c)^2$ *en l'écrivant* $((a+b)+c)^2$, *puis en redéveloppant le carré. On trouve*

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc.$$

En utilisant le résultat de la question précédente $ab+bc+ac\le a^2+b^2+c^2$, *on obtient exactement le résultat demandé.*

Exercice 3 - *Une équation avec des racines carrée*

Déterminer les réels x tels que : $\sqrt{2-x}=x$.

Corrigé

On va raisonner par analyse-synthèse.

Analyse : Imaginons que x *soit une solution de cette équation. Alors il est déjà clair que :* $x\in]-\infty;2]$,

www.guessmaths.co E-mail : abdelaliguessouma@gmail.com whatsapp : 0604488896

sinon la racine carrée n'aurait pas de sens. On doit aussi avoir $x \geq 0$, car la racine carrée est positive et donc $x \in [0;2]$.

Élevons ensuite l'équation au carré. Si x est solution, alors $2-x=x^2$, c'est-à-dire $x^2+x-2=0$; donc : $(x-1)(x+2)=0$. La résolution de cette équation donne $x_1=-1$ et $x_2=2$. Seul est dans l'intervalle souhaité. Donc la seule solution possible est 1.

<u>Exercice 4</u> - Egalités et inégalités avec des valeurs absolues

Résoudre dans $\mathbb{R}$ *les équations et inéquations suivantes :*

1. $|x+3|=5$ 3. $|x+2|>7$

2. $|x+3|\leq 5$ 4. $|2x-4|\leq|x+2|$

<u>Corrigé</u>

1. On cherche les réels qui sont à une distance exactement égale à 5 de -3 . càd : $\begin{cases} x+3=5 \\ x+3=-5 \end{cases}$

 On trouve $S=\{2,-8\}$.

2. On cherche les réels qui sont à une distance inférieure ou égale à 5 de -3. càd : $\begin{cases} x+3\geq 5 \\ x+3\leq -5 \end{cases}$

 Donc : $\begin{cases} x\geq 2 \\ x\leq -8 \end{cases}$ .On trouve $S=[-8;2]$.

3. On cherche les réels qui sont à une distance strictement supérieure à 7 de -2. càd : $\begin{cases} x+2\geq 7 \\ x+2\leq -7 \end{cases}$

 Donc : $\begin{cases} x\geq 5 \\ x\leq -9 \end{cases}$. On trouve $S=]-\infty;-9[\cup]5;+\infty[$.

4. $2x-4$ change de signe en 2, et $x+2$ change de signe en -2. On distingue alors 3 cas :
 - Si $x\leq -2$, alors $|x+2|=-x-2$ et $|2x-4|=-2x+4$. L'équation est alors équivalente à
 $-2x+4\leq -x-2$; Donc : $x\geq 6$
 ce qui est incompatible avec $x\leq -2$. D'où pas de solution dans l'intervalle $]-\infty;-2]$.
 - Si $x\in[-2;2]$, alors $|x+2|=x+2$ et $|2x-4|=-2x+4$. L'équation est alors équivalente à $-2x+4\leq x+2$; donc : $x\geq \frac{2}{3}$.
 L'intervalle qui nous intéresse ici est donc $\left[\frac{2}{3};2\right]$.
 - Si $x\geq 2$, alors $|x+2|=x+2$ et $|2x-4|=2x-4$, et donc l'équation est équivalente à $2x-4\leq x+2$; donc : $x\leq 6$.
 L'intervalle qui nous intéresse ici est donc $[2;6]$.

5. Finalement, l'ensemble des solutions est $S=\left[\frac{2}{3};6\right]$.

<u>Exercice 5</u> - Inégalités

Résoudre dans $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{R}^*$ *les inégalités suivantes :*

1. $|x+1|+|x-3|\leq 6$ 2. $\left|\frac{1}{x}-2\right|\leq 3$.

<u>Corrigé</u>

1. Notons S l'ensemble des solutions de cette inéquation. On va déterminer S en séparant l'étude en trois cas, afin d'enlever les valeurs absolues.

- *Si* $x \geq 3$ *, alors* $|x+1| = x+1$ *et* $|x-3| = x-3$ *. L'inéquation est donc équivalente à* $2x-2 \leq 6$ *c'est-à-dire à* $x \leq 4$*. On a donc* $S \cap [3;+\infty[= [3;4]$ *.*
- *Si* $x \in [-1;3]$ *, alors* $|x+1| = x+1$ *et* $|x-3| = -x-3$ *. L'inéquation est alors équivalente à* $x+1-x+3 \leq 6$ *ou encore* $4 \leq 6$ *. C'est toujours vrai et donc* $S \cap [-1;3] = [-1;3]$*.*
- *Si* $x \leq -1$ *, on a* $|x+1| = -x-1$ *et* $|x-3| = -x+3$ *. L'inéquation est dans ce cas équivalente à* $-2x+2 \leq 6$ *, soit* $x \geq -2$ *. Ainsi,* $S \cap]-\infty;-1] = [-2;1]$*.*

Finalement, on a prouvé que $S = [-2;4]$ *.*

2. *On a :* $\left|\frac{1}{x} - 2\right| \leq 3$ *; donc :* $-3 \leq \frac{1}{x} - 2 \leq 3$

   D'où : $-1 \leq \frac{1}{x} \leq 5$

On distingue alors deux cas. Si $x > 0$ *, alors l'inégalité de gauche est toujours vérifiée et on doit simplement déterminer les* $x > 0$ *tels que :* $\frac{1}{x} \leq 5$*, c'est-à-dire* $x \geq \frac{1}{5}$ *. Si* $x < 0$ *, cette fois c'est l'inégalité de droite qui est toujours vérifiée et on doit résoudre* $-1 \leq \frac{1}{x}$ *(pour* $x < 0$*), qui donne* $x \leq -1$ *. Finalement, on trouve que l'ensemble des solutions est* $]-\infty;-1] \cup \left[\frac{1}{5};+\infty\right[$ *.*