



Série d'exercices 1 « Fonction Logarithme »

Exercice 1

Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{\sin^2(x)}$

Correction Exercice 1

Le numérateur et le dénominateur s'annulent en 0, il s'agit d'une forme indéterminée sous la forme " $\frac{0}{0}$ ", nous allons décomposer cette expression dans le but d'obtenir une autre expression où on fait

apparaître des limites connues ; alors soit $x > 0$; on a :

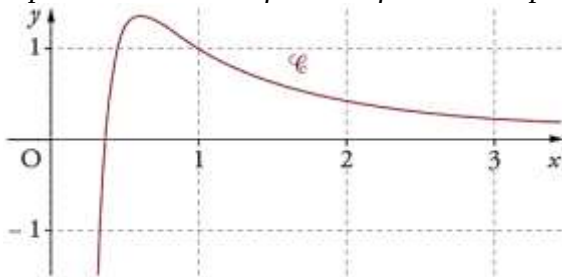
$$\frac{\ln(1+x^2)}{\sin^2(x)} = \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} \times \frac{x^2}{\sin^2(x)} = \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} \times \left(\frac{x}{\sin(x)} \right)^2$$

Comme $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin(x)} = 1$

Alors $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{\sin^2(x)} = 1 \times 1 = 1$

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{1+\ln x}{x^2}$ et soit C la courbe représentative de la fonction f dans un repère du plan. La courbe C est donnée ci-dessous :



1. a) Montrer que : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$

b) Montrer que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

c) En déduire les asymptotes éventuelles à la courbe C .

2. a) On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

Vérifier que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0 ; +\infty[$, $f'(x) = \frac{-1-2\ln x}{x^3}$.

b) Résoudre sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ l'inéquation $-1-2\ln x > 0$.

En déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

c) Dresser le tableau des variations de la fonction f .

3. a) Démontrer que la courbe C a un unique point d'intersection avec l'axe des abscisses, dont on précisera les coordonnées.

b) En déduire le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$
 4. Pour tout entier $n \geq 1$, on note I_n l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe C et les droites d'équations respectives $x = \frac{1}{e}$ et $x = n$.

a) Démontrer que $0 \leq I_n \leq e - \frac{1}{2}$.

On admet que la fonction F , définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par : $F(x) = \frac{-2 - \ln x}{x}$, est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

b) Calculer I_n en fonction de n .

c) Étudier la limite de I_n en $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

Correction Exercice 2

1.a) Calculons $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

$$\begin{aligned} \text{On a : } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 + \ln x}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + \ln x) \times \frac{1}{x^2} = -\infty \end{aligned}$$

$$\text{Car : } \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + \ln x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

b) Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\begin{aligned} \text{On a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} + \frac{\ln x}{x} \times \frac{1}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} + \frac{\ln x}{x} \times \frac{1}{x} = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Car : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

c) Interprétation géométrique

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, alors l'axe des abscisses est asymptote horizontale à la courbe C au voisinage de $+\infty$.

Comme $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$, l'axe des ordonnées est asymptote verticale à la courbe C .

2.a) Calcule de la dérivée de f

Comme la fonction $\ln$ est dérivable sur $]0; +\infty[$, la fonction $x \mapsto 1 + \ln x$ est dérivable sur $]0; +\infty[$.

La fonction $x \mapsto x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc dérivable sur $]0; +\infty[$.

Par suite, la fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]0; +\infty[$.

Pour tout nombre réel strictement positif x :

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x^2 - (1 + \ln x) \times 2x}{(x^2)^2}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{x - (1 + \ln x) \times 2x}{x^4} \\
 &= \frac{1 - (1 + \ln x) \times 2}{x^3} \\
 &= \frac{-1 - 2 \ln x}{x^3}
 \end{aligned}$$

b) Étude de signe de $f'(x)$

Pour tout nombre réel strictement positif x :

$$-1 - 2 \ln x > 0 \Leftrightarrow -2 \ln x > 1$$

$$\Leftrightarrow \ln x < -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x < e^{-\frac{1}{2}}$$

Par un raisonnement analogue, nous pouvons démontrer que $-1 - 2 \ln x < 0 \Leftrightarrow x > e^{-\frac{1}{2}}$ et

$$-1 - 2 \ln x > 0 \Leftrightarrow x < e^{-\frac{1}{2}}.$$

Comme $x^3 > 0$, $f'(x)$ a le même signe que son numérateur $-1 - 2 \ln x$. Le tableau de signe s'ensuit :

x	0	$e^{-\frac{1}{2}}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-

c) Dresser le tableau de variations d'une fonction

Le tableau de variations découle immédiatement du tableau de signes de $f'(x)$. En effet, comme sur

l'intervalle $]0; e^{-\frac{1}{2}}[$, $f'(x)$ est strictement positive, la fonction f est strictement croissante

sur $]0; e^{-\frac{1}{2}}[$. Par contre, comme sur l'intervalle $]e^{-\frac{1}{2}}; +\infty[$, $f'(x)$ est strictement négative, la

fonction f est strictement décroissante sur $]e^{-\frac{1}{2}}; +\infty[$.

x	0	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	$+\infty$
Variations de f	$-\infty \rightarrow f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = \frac{e}{2} \rightarrow 0$		

3.a) Déterminer les coordonnées d'un point d'intersection

Un point M de coordonnées $(x; y)$ appartient à la courbe C si et seulement si $x > 0$ et $y = f(x)$.

Un point M de coordonnées $(x; y)$ appartient à l'axe des abscisses si et seulement si $y = 0$.

Par conséquent, pour déterminer les coordonnées d'un point M appartenant à la courbe C et à l'axe des abscisses, nous devons résoudre sur $]0; +\infty[$ l'équation $f(x) = 0$.

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1 + \ln x}{x^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 + \ln x = 0$$

$$\Leftrightarrow \ln x = -1$$

$$\Leftrightarrow x = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

La courbe C a un unique point d'intersection avec l'axe des abscisses : les coordonnées de ce point sont $\left(\frac{1}{e}; 0\right)$.

b) Étudier le signe d'une fonction

La fonction f est décroissante sur $\left[\frac{1}{\sqrt{e}}; +\infty\right[$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. Il s'ensuit que la fonction f est positive sur $\left[\frac{1}{\sqrt{e}}; +\infty\right[$.

La fonction f est croissante sur $\left]0; \frac{1}{\sqrt{e}}\right]$ et elle s'annule en $\frac{1}{e}$. Il s'ensuit que la fonction f est strictement négative sur $\left]0; \frac{1}{e}\right[$ et strictement positive sur $\left]\frac{1}{e}; \frac{1}{\sqrt{e}}\right]$.

x	0	$\frac{1}{e}$	$+\infty$
Signe de $f(x)$	-	0	+

4.a) Encadrer une intégrale

D'après le tableau de variations (question 2. c)), pour tout nombre réel strictement positif x ,

$$f(x) \leq \frac{e}{2}.$$

D'après le tableau de signes (question 3. b)), pour tout nombre réel x dans l'intervalle $\left[\frac{1}{e}; 2\right]$, $f(x) \geq 0$.

Par conséquent, sur $\left[\frac{1}{e}; 2\right]$, $0 \leq f(x) \leq \frac{e}{2}$.

Les fonctions $f, x \mapsto 0$ et $x \mapsto \frac{e}{2}$ sont continues sur $\left[\frac{1}{e}; 2\right]$. Par propriété de l'intégrale, il en découle que :

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{e}}^2 0 dx &\leq \int_{\frac{1}{e}}^2 f(x) dx \leq \int_{\frac{1}{e}}^2 \frac{e}{2} dx \\ &\Leftrightarrow 0 \leq \int_{\frac{1}{e}}^2 f(x) dx \leq \left[\frac{e}{2}x\right]_{\frac{1}{e}}^2 \\ &\Leftrightarrow 0 \leq \int_{\frac{1}{e}}^2 f(x) dx \leq e - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Conclusion : $0 \leq I_2 \leq e - \frac{1}{2}$