Série n° 4 d'exercices Notions de logique **1BAC S.Eco**

Année scolaire 2021-2022

Proposition- Fonction propositionnelle

Exercice N°1

Donner la négation et la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes s'il est possible,

$P_1 :\ \forall x \in \mathbb{R} : x^2 - x + 1 > 0$

$P_2 :\ \exists x \in \mathbb{R} \,/\, x^2 - 2 = 0$

$P_3 :\ (\forall n \in \mathbb{N});(\exists m \in \mathbb{N}) \,/\, n < m$

$P_4 :\ (\forall x \in \mathbb{R});\ (\exists y \in \mathbb{Q}) \,/\, x = y \text{ ou } x > y$

$P_5 :\ (\forall y \in \mathbb{R});(\exists x \in \mathbb{R}) \,/\, x - 2y + 1 = 0$

$P_6 :\ (\exists x \in \mathbb{R}) \,/\ 2x^2 + 5x - 3 = 0$

$P_7 :\ (\forall x \in \mathbb{R});(\forall x \in \mathbb{R}) :\ x^2 = y^2 \text{ et } x = y$

$P_8 :\ (\forall x \in \mathbb{R}) : -1 \leq \cos x \leq 1$

Exercice N°2

Écrire à l'aide des quantificateurs et connecteurs logiques les propositions suivantes :

1) *Le carré de n'importe quel nombre réel est un nombre réel positif.*
2) *L'équation $x^2 - 6x + 7 = 0$ admet au moins une solution réelle.*
3) *Il n'existe aucun rationnel x qui vérifie : $x^2 = 3$.*
4) *Il existe au moins un réel inférieur à tous les nombres réels.*
5) *Si un nombre réel quelconque est inférieur à -1 alors c'est un nombre réel strictement négatif.*
6) *Le produit de deux nombres réels quelconques est nul si et seulement si l'un d'eux est nul.*

Exercice N°3

(Raisonnement par contraposé)

1) *Montrer que* : $(\forall x \in \mathbb{R} - \{-1\})\ ;\ x \neq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{3x}{x+1} \neq 1.$

2) *Soit a et b deux réels tels* $b \neq 2a$.

Montrer que : $b \neq \frac{1}{8}a \Rightarrow \frac{a+2b}{2a-b} \neq \frac{2}{3}$

3) *Montrer que* : $(\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2) : (x + y \leq 6 \Rightarrow (x \leq 3 \text{ ou } y \leq 3)$.

4) *Montrer que*: $(\forall x \in \mathbb{R}) : (x + x^3 \leq 2 \Rightarrow x \leq 1)$

5) *Montrer que* : $(\forall x \in \mathbb{R}) : (x \neq -2 \Rightarrow x^3 + 2x^2 + x + 2 \neq 0)$

Exercice N°4

(Raisonnement par implications successives)

1) Montrer que : $(\forall x\in \mathbb{R}):\left(2\le x\le 3\Rightarrow \frac{1}{3}\le \frac{x}{x^2-3}\le 3\right)$

2) Montrer que : $(\forall x\in \mathbb{R}^+):\left(\frac{1}{1+\sqrt{x}}=1-\sqrt{x}\Rightarrow x=0\right)$

3) Montrer que : $(\forall (x;y)\in \mathbb{R}^2):\left(\frac{x^2-1}{x^2+3}=\frac{y^2-1}{y^2+3}\Rightarrow |x|=|y|\right)$

4) Montrer que : $(\forall (x;y)\in \mathbb{R}^2): xy^2-yx^2=y-x\Rightarrow x=y \text{ ou } xy=1$

Exercice N°5

(Raisonnement par équivalences)

1) Montrer que : $(\forall a\in \mathbb{R})\ ;|a-2|\le \frac{2}{3}\Leftrightarrow \frac{1}{10}\le \frac{1}{3a+2}\le \frac{1}{6}$

2) Soit a, b et c des réels

Montrer que : $(a^3+a=b^3+b)\Leftrightarrow a=b$

3) Soit $x\in \mathbb{R}^+$, montrer que : $\frac{\sqrt{x}}{x^2-x+1}\le \frac{4}{3}\sqrt{x}$

4) Montrer que : $(\forall x\in \mathbb{R}^+);\left(\sqrt{2x+2}-\sqrt{x}=1\Leftrightarrow x=1\right)$

Exercice N°6

(Raisonnement par l'absurde)

1) Montrer que : $(\forall x\in \mathbb{R}^*);\left(2\sqrt{1+x^2}\ne x^2+2\right)$

2) Montrer que : $\sqrt{6}\notin \mathbb{Q}$

3) Montrer que : $(\forall n\in \mathbb{N}^*)\ ;\ \sqrt{\frac{n}{n+1}}\notin \mathbb{Q}$

Exercice N°7

(Raisonnement par contre-exemple)

1) Montrer que la proposition : $(\forall x\in \mathbb{R});\ x^2-5x+4>0$ est fausse.

2) Soit f la fonction définie par $f(x)=2x^2-x+1$:.

Montrer que la fonction f est ni paire, ni impaire.

Exercice N°8

(Raisonnement par disjonction des cas)

1) Montrer que pour tout $x\in \mathbb{R}$: $|x-3|\le x^2-x+5$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $x^2-|3x-1|+2=0$

3) Montrer que : $n(n+1)(n+2)$ est un multiple de 3 pour tout $n \in \mathbb{N}$

Exercice N°9

(Raisonnement par récurrence)

1) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 1+2+2^2+\cdots+2^n = 2^{n+1}-1$

2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $1^2+2^2+3^2+\cdots+ n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

3) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 1^3+2^3+3^3+\cdots+ n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

4) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 1\times 2+2\times 3+3\times 4+\cdots+n\times(n+1) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{3}$

5) Soit $x \in \mathbb{R}$.

Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $(1+x)^n \geq nx+1$.

6) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 9$ divise 4^n+6n-1

7) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; 11 divise $3^{2n}+2^{6n-5}$

8) Monter que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $2^{3n+2}-4$ est un multiple de 7.