Calcul d'intégral méthode et astuces 2éme Bac PC- SVT

Calculer : $A=\int_2^5\left(3x^2+4x-5\right)dx$ $B=\int_{-1}^1 e^{-2x}\,dx$ $C=\int_0^1\frac{e^x}{e^x+3}dx$

$$A=\int_2^5\left(3x^2+4x-5\right)dx$$
$$=\left[x^3+2x^2-5x\right]_2^5$$
$$=5^3+2\times5^2-5\times5-\left(2^3+2\times2^2-5\times2\right)$$
$$=125+50-25-(8+8-10)$$
$$=144$$

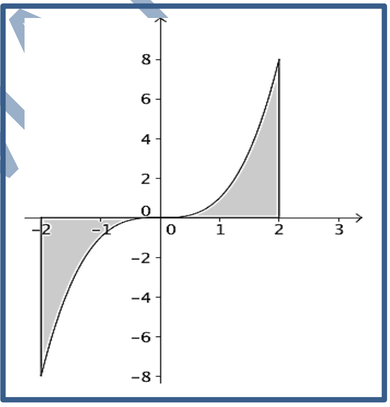
$$B=\int_{-1}^1 e^{-2x}dx$$
$$=\left[\frac{1}{-2}e^{-2x}\right]_{-1}^1$$
$$=\frac{1}{-2}e^{-2\times1}-\frac{1}{-2}e^{-2\times(-1)}$$
$$=-\frac{1}{2}e^{-2}+\frac{1}{2}e^{2}$$
$$=\frac{e^2}{2}-\frac{1}{2e^2}$$

$$C=\int_0^1\frac{e^x}{e^x+3}dx$$
$$=\left[\ln\left(e^x+3\right)\right]_0^1$$
$$=\ln\left(e^1+3\right)-\ln\left(e^0+3\right)$$
$$=\ln(e+3)-\ln4$$
$$=\ln\left(\frac{e+3}{4}\right)$$

- ✓ *Si une intégrale est nulle, alors la fonction n'est pas nécessairement nulle.*

Par exemple :

$$\int_{-2}^2 x^3dx=\left[\frac{1}{4}x^4\right]_{-2}^2=\frac{1}{4}\times2^4-\frac{1}{4}\times(-2)^4=4-4=0.$$



Méthode :

Calculer une intégrale en appliquant la linéarité

On pose : $A=\int_0^{2\pi}\cos^2x\,dx$ *et* $B=\int_0^{2\pi}\sin^2x\,dx$

a) Calculer $A+B$ *et* $A-B$.

b) En déduire A et B.

a) On calcule en appliquant les formules de linéarité :

$$A+B=\int_0^{2\pi}\left(\cos^2x\right)dx+\int_0^{2\pi}\left(\sin^2x\right)dx$$
$$=\int_0^{2\pi}\left(\cos^2x+\sin^2x\right)dx$$
$$=\int_0^{2\pi}1dx$$
$$=[x]_0^{2\pi}$$
$$=2\pi-0$$
$$=2\pi$$

$$A-B=\int_0^{2\pi}\left(\cos^2x\right)dx-\int_0^{2\pi}\left(\sin^2x\right)dx$$
$$=\int_0^{2\pi}\left(\cos^2x-\sin^2x\right)dx$$
$$=\int_0^{2\pi}(\cos2x)dx$$
$$=\left[\frac{1}{2}\sin2x\right]_0^{2\pi}$$
$$=\frac{1}{2}\sin(2\times2\pi)-\frac{1}{2}\sin(2\times0)=0$$

b) On a ainsi :

$$\begin{cases}A+B=2\pi\\A-B=0\end{cases}\ \text{donc}\ \begin{cases}2A=2\pi\\A=B\end{cases}\ \text{soit : } A=B=\pi.$$

Méthode :
Encadrer une intégrale

a) Démontrer que pour tout x de [0 ; 1], on a $0 \le e^{x^2} \le e^x$.
b) En déduire que $0 \le \int_0^1 e^{x^2}\,dx \le e-1$.

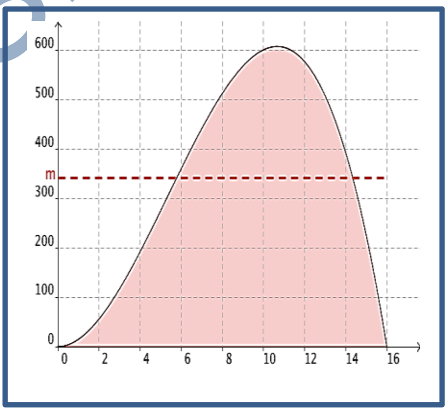
a) Sur [0 ; 1], $x^2 \le x$.
Comme la fonction exponentielle est croissante et positive sur $\mathbb{R}$*, on a* $0 \le e^{x^2} \le e^x$.

b) On déduit de la question précédente que $\int_0^1 0\,dx \le \int_0^1 e^{x^2}\,dx \le \int_0^1 e^x\,dx$.
$\int_0^1 0\,dx = 0$ *et* $\int_0^1 e^x\,dx = \left[e^x\right]_0^1 = e-1$
D'où $0 \le \int_0^1 e^{x^2}\,dx \le e-1$

Méthode :
Calculer une valeur moyenne d'une fonction

On modélise à l'aide d'une fonction le nombre de malades lors d'une épidémie.
Au x-ième jour après le signalement des premiers cas, le nombre de malades est égale à $f(x) = 16x^2 - x^3$.
Déterminer le nombre moyen de malades chaque jour sur une période de 16 jours.

$$\begin{aligned}
m &= \frac{1}{16-0}\int_0^{16} f(x)dx \\
&= \frac{1}{16}\int_0^{16}\left(16x^2 - x^3\right)dx \\
&= \frac{1}{16}\left[\frac{16}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\right]_0^{16} \\
&= \frac{1}{16}\left(\frac{16}{3}\times 16^3 - \frac{1}{4}\times 16^4\right) \\
&= \frac{16^3}{3} - \frac{16^3}{4} \\
&= \frac{16^3}{12} \\
&= \frac{1024}{3} \approx 341
\end{aligned}$$



Le nombre moyen de malades chaque jour est environ égal à 341.

Exemple :
Calculons la valeur moyenne de la fonction f définie par $f(x) = 3x^2 - 4x + 5$ *sur l'intervalle [0 ; 10].*

$$\begin{aligned}
m &= \frac{1}{10-0}\int_0^{10}\left(3x^2 - 4x + 5\right)dx \\
&= \frac{1}{10}\left[x^3 - 2x^2 + 5x\right]_0^{10} \\
&= \frac{1}{10}(1000 - 200 + 50) \\
&= 85
\end{aligned}$$