EXERCICE 1:

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

On considère la fonction f définie sur IR par : $f\left(x\right)=x^2e^{-x}$.

On note f' *la fonction dérivée de f.*

1. a. *Déterminer les limites de la fonction f en* $-\infty$ *et* $+\infty$.

   b. *Calculer* $f'\left(x\right)$ *et déterminer le tableau de variations de f.*

   c. *En déduire le signe de f sur IR.*

2. *Pour tout nombre réel a, on considère l'intégrale :* $I\left(a\right)=\int_0^a f\left(x\right)dx$.

   a. *Donner selon les valeurs de a le signe de* $I\left(a\right)$

   b. *A l'aide d'une double intégration par parties montrer que pour tout nombre réel a :*

   $I\left(a\right)=2-2e^{-a}\left(1+a+\frac{a^2}{2}\right)$.

   c. *En déduire pour tout nombre réel a :* $\frac{1}{2}e^aI\left(a\right)=e^a-\left(1+a+\frac{a^2}{2}\right)$.

3. *Soient g et h les fonctions définies sur IR par :* $g\left(x\right)=e^x$ *et* $h\left(x\right)=1+x+\frac{x^2}{2}$

On note $\left(C_g\right)$ *la courbe représentative de g et* $\left(C_h\right)$ *celle de h.*

   a. *Montrer que les courbes* $\left(C_g\right)$ *et* $\left(C_h\right)$ *ont la même tangente au point d'abscisse 0.*

   b. *Déduire des questions précédentes la position relative des courbes* $\left(C_g\right)$ *et* $\left(C_h\right)$.

EXERCICE 2:

PARTIE A

On considère la fonction f définie sur l 'intervalle $]0;+\infty[$ *par :* $f\left(x\right)=\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$.

On note $\left(C_f\right)$ *sa courbe représentative dans un repère orthonormé* $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$. *(L'unité graphique est 1 cm).*

1. a. *Calculer* $\lim\limits_{x\to0^+} f\left(x\right)$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)$.

   b. *Interpréter géométriquement ces deux résultats.*

2. *Etude des variations de la fonction f*

   a. *Montrer que pour tout réel x strictement positif :* $f'\left(x\right)=\frac{1}{x^4}e^{\frac{1}{x}}\left(2x+1\right)$.

   b. *Etudier le signe de* $f'\left(x\right)$ *et en déduire le tableau de variation de f sur l'intervalle* $]0;+\infty[$.

   c. *Démontrer que l'équation* $f\left(x\right)=2$ *admet une unique solution* α *dans l'intervalle* $]0;+\infty[$ *et donner un encadrement de* α *d'amplitude*

3. *Tracer la courbe* $\left(C_f\right)$ *dans le repère orthonormé* $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

PARTIE B *Etude d'une suite d'intégrales*

Pour tout entier naturel $n \geq 2$ on considère l'intégrale I_n définie par : $I_n = \int_1^2 \frac{1}{x^n} e^{\frac{1}{x}} dx$.

1. Calculer I_2.

2. a. Démontrer, à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout entier naturel $n \geq 2$:

$$I_{n+1} = e - \frac{\sqrt{e}}{2^{n-1}} + (1-n) I_n \text{ .}$$

b. Calculer I_3

3. Etude de la limite de la suite (I_n).

a. Etablir que pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[1;2]$ on a: $0 \leq \frac{1}{x^n} e^{\frac{1}{x}} \leq \frac{e}{x^n}$.

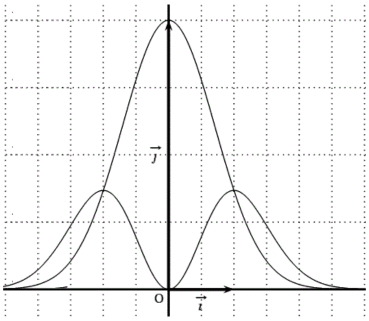
b. En déduire un encadrement de I_n ; en déduire la limite éventuelle de la suite (I_n).

EXERCICE 3:

Partie A

On considère les fonctions f et g définies sur IR par : $f(x) = e^{-x^2}$ et $g(x) = x^2 e^{-x^2}$.

On note respectivement (C_f) et (C_g) les courbes représentatives de f et g dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$, représentées ci-dessous



1. Identifier (C_f) et (C_g) sur la figure (Justifier la réponse apportée).

2. Etudier la parité des fonctions f et g.

3. Etudier le sens de variation de f et de g. Etudier les limites éventuelles de f et de g en $+\infty$.

4. Etudier la position relative de (C_f) et (C_g)

Partie B

On considère la fonction G définie sur IR par : $G(x) = \int_0^x t^2 e^{-t^2} dt$.

1. Que représente G pour la fonction g ?

2. Donner, pour $x > 0$, une interprétation de $G(x)$ en termes d'aires.

3. Étudier le sens de variations de G sur IR.

On définit la fonction F sur IR par : pour tout réel x ; $F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$

On admet que la fonction F admet une limite finie en $+\infty$, et que cette limite ℓ est égale à l'Aire $\mathbb{A}_f$, en unités d'aire, du domaine limite par la courbe (C_f) et les demi-droites $[O;\vec{i})$ et $[O;\vec{j})$.

5. a. Démontrer que la fonction G admet une limite en $+\infty$; que l'on précisera.

b. Interpréter en termes d'aires le réel $N = \int_0^1 (1-t^2) e^{-t^2} dt$.

c. En admettant que la limite de G en $+\infty$ représente l'aire $\mathbb{A}_g$ en unités d'aire du domaine limite par la demi-droite $\left[O;\vec{i}\right)$ et la courbe $\left(C_g\right)$ justifier graphiquement que : $\int_0^1\left(1-t^2\right)e^{-t^2}dt \geq \frac{\ell}{2}$

(on pourra illustrer le raisonnement sur la figure fournie)

EXERCICE 4

On considère les fonctions d'une variable réelle indicées par le paramètre p réel non nul:

$f_p : x \mapsto e^{px}\left(x-3\right)$

1) Etudier en fonction de p , la monotonie de f_p .

Déterminer les solutions de l'équation $f_p\left(x\right)=0$ *et les extremums éventuels de* f_p .

2) Quelle valeur faut-il donner à p afin que f_p *ait un extremum pour* $x=0$

Pour la suite de l'exercice, on pose $p=1$

3) a) Dans un repère orthonormé, tracer la courbe $\left(C_{f_1}\right)$ *de* f_1 .

b) Déterminer une équation de la tangente à $\left(C_{f_1}\right)$ *en son point d'inflexion .*

c) Calculer l'aire de la surface délimitée par $\left(C_{f_1}\right)$ *;l'axe des abscisses et les droites d'équations* $x=0$ *et* $x=3$.

d) Parmi les fonctions $g : x \mapsto m\frac{1}{x}+n$ *(m et n réels) , il en existe une dont le graphe est tangent à* $\left(C_{f_1}\right)$ *au point* $\left(3;0\right)$ *. Calculer dans ce cas m et n.*

EXERCICE 5

Le plan est rapport à un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ *. Soit la fonction f définie sur* $\left[0;+\infty\right[$ *par :*

$f\left(x\right)=e^{-x}\cos\left(4x\right)$

et $\left(C_f\right)$ *sa courbe représentative. (voir graphe en fin de l'exercice)*

On considère également la fonction g définie sur $\left[0;+\infty\right[$ *par* $g\left(x\right)=e^{-x}$ *et on nomme* $\left(C_g\right)$ *sa courbe représentative dans le repère* $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

1. a. Montrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $\left[0;+\infty\right[$; $-e^{-x} \leq f\left(x\right) \leq e^{-x}$.

b. En déduire la limite de f en $+\infty$.

2. communs aux courbes $\left(C_f\right)$ *et* $\left(C_g\right)$.

3. On définit la suite $\left(u_n\right)$ *sur IN par :* $u_n = f\left(n\frac{\pi}{2}\right)$.

a. Montrer que la suite $\left(u_n\right)$ *est une suite géométrique. En préciser sa raison.*

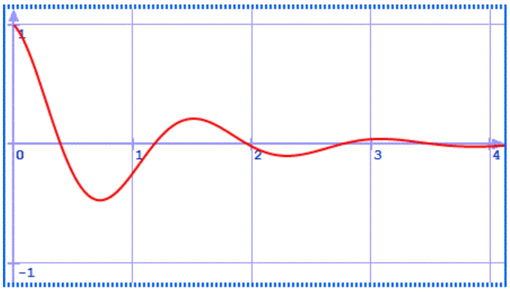
b. En déduire le sens de variation de la suite $\left(u_n\right)$ *et étudier sa convergence*

4. a. Montrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $\left[0;+\infty\right[$; $f'\left(x\right)=-e^{-x}\left[\cos\left(4x\right)+4\sin\left(4x\right)\right]$

b. En déduire que les courbes $\left(C_f\right)$ *et* $\left(C_g\right)$ *ont même tangente en chacun de leurs points communs*

5. Donner une valeur approches à 10^{-1} *près par excès du coefficient directeur de la droite* $\left(T\right)$ *tangente à la courbe* $\left(C_f\right)$ *au point d'abscisse* $\frac{\pi}{2}$.

Compléter le graphique en y traçant $\left(C_g\right)$ *et* $\left(T\right)$.



EXERCICE 6

On considère la fonction f définie sur IR par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{xe^x}{e^x-1} & si\ \ x\neq 0 \\ f(0)=1 \end{cases}$.

On note (C) *la courbe représentative de f dans un repère orthonormé* $(O;\vec{i};\vec{j})$

1. a. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

b. Etablir que, pour tout nombre réel r non nul , on a : $f(x)=x\left(1+\dfrac{1}{e^x-1}\right)$ *; En déduire* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2. Donner sans démontrer la limite suivante $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{e^x-1}$ *et montrer que f est continue en 0.*

3. a. Montrer que, pour tout nombre réel x, on a : $e^x \geq x+1$ *et que l'égalité n'a lieu que pour* $x=0$.

b. Calculer $f'(x)$ *la dérivée de la fonction f et déterminer la fonction g telle que, pour tout nombre réel x non nul :* $f'(x)=\dfrac{e^x g(x)}{\left(e^x-1\right)^2}$

c. Donner le tableau des variations de f.

4. Soient x un nombre réel non nul et les points $M(x;f(x))$ *et* $M'(-x;f(-x))$ *de la courbe* (C).

a. Montrer que : $(\forall x\in IR^*)$; $f(-x)=\dfrac{x}{e^x-1}$ *puis déterminer le coefficient directeur de la droite* (MM')

b. On admet que la fonction f est dérivable en 0.
Que signifie alors le résultat précèdent ?