Exercice 1

Résoudre l'équation $(E): 4iz^3+2(1+3i)z^2-(5+4i)z+3(1-7i)=0$ *, sachant qu'elle admet une racine réelle.*

Correction Exercice 1

Soit x une racine réelle de (E)*, alors :* $(E): 4ix^3+2(1+3i)x^2-(5+4i)x+3(1-7i)=0$. *Partie réelle et partie imaginaire du membre de gauche doivent être nulles, on obtient donc après identification :*

$$\begin{cases} 2x^2-5x+3=0 \\ 4x^3+6x^2-4x-21=0 \end{cases}.$$

Il est facile de résoudre la première équation et de vérifier si on obtient une racine de l'autre équation. On trouve que $x=\frac{3}{2}$ *est racine. On factorise alors le polynôme par :* $z-\frac{3}{2}$*, et on trouve (par exemple en procédant par identification) :* $4iz^3+2(1+3i)z^2-(5+4i)z+3(1-7i)=\left(z-\frac{3}{2}\right)\left(4iz^2+2(1+6i)z+2(-1+7i)\right)$

.

Reste à résoudre ensuite l'équation : $4iz^2+2(1+6i)z+2(-1+7i)=0$

dont les solutions sont $-2+\frac{3}{2}i$ *et* $-1-i$.

Exercice 2

Soit $n\geq 1$ *et* $\omega=e^{\frac{2i\pi}{n}}$.

1. *Calculer le produit des racines n-ièmes de l'unité.*
2. *Soit* $p\geq 0$. *Calculer* $\sum_{k=0}^{n-1}\omega^{kp}$
3. *En déduire que :* $\sum_{k=0}^{n-1}\left(1+\omega^k\right)^n=2n$.

Correction Exercice 2

1. *Les racines n-ièmes de l'unité sont les complexes* ω^k*, avec* $k=0;\ldots;n-1$.*Leur produit vaut donc :*
$\prod_{k=0}^{n-1}\omega^k=\omega^{\sum_{k=0}^{n-1}k}=\omega^{\frac{n(n-1)}{2}}=e^{i\pi(n-1)}=(-1)^{n-1}$ *(résultat qu'on vérifie facilement pour* $n=1;2;3;4$*).*
2. *On a ici une somme géométrique de raison* ω^p. *Si p est un multiple de n, la raison est donc égale à 1, et la somme fait n. Sinon, on a :* $\sum_{k=0}^{n-1}\omega^{kp}=\frac{1-\omega^{np}}{1-\omega^p}=0$
puisque $\omega^n=1$.
3. *On développe la puissance à l'intérieur de la somme en utilisant la formule du binôme de Newton, et on trouve :*
$$\sum_{k=0}^{n-1}(1+\omega^k)^n=\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{p=0}^{n}C_n^p\omega^{kp}=\sum_{p=0}^{n}C_n^p\sum_{k=0}^{n-1}\omega^{kp}.$$
On utilise le résultat de la question précédente : la somme $\sum_{k=0}^{n-1}\omega^{kp}$ *est nulle, sauf si* $p=0$ *ou si* $p=n$. *Dans ce cas, cette somme fait n. On en déduit que :* $\sum_{k=0}^{n-1}(1+\omega^k)^n=nC_n^0+nC_n^n=2n$