# Examen Normalisé n° 4 — 2éme Bac Sc.ECO

**EXERCICE 1** (3 pts)

1) a- Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R})$ ; $\dfrac{e^{2x}}{e^x+1} = e^x - 1 + \dfrac{1}{e^x+1}$

b- Montrer que $H : x \mapsto \ln\left(\dfrac{e^x}{e^x+1}\right)$ est une primitive de fonction $h : x \mapsto \dfrac{1}{e^x+1}$ sur $\mathbb{R}$ puis

calculer : $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \dfrac{e^{2x}}{e^x+1}dx$ .

2) Calculer : $\displaystyle\int_0^{\ln 2} e^x \ln\left(e^x+1\right)dx = 3\ln 3 - 2\ln 2 - 1$.

**EXERCICE 2** (5 pts)

On considère la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ; définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{4u_n+3}{3u_n+4} \end{cases} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

1) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})$ ; $u_n > 1$.

2) a- Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

b- En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose : $u_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$

a- Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{7}$

b- Exprimer $v_n$ en fonction de n.

c- En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N})$ ; $u_n = \dfrac{2+\left(\frac{1}{7}\right)^n}{2-\left(\frac{1}{7}\right)^n}$.

d- Calculer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

4) Déterminer le plus petit entier naturel n pour que $u_n < 1{,}0004$.

**Problème** (12 points)

**Partie I**

Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = 1 + x - x\ln x$

1) Ci-dessous le tableau de variations de g sur $]0;+\infty[$.

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $g(x)$ | $0$ | $\nearrow$ | $2$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

2) Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution $\alpha$ dans $]0;+\infty[$ tel que : $e<\alpha<e^2$.

3) Déduire le signe $g(x)$ sur $]0;+\infty[$.

**Partie II**

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{\ln x}{1+x}$

Et $(C_f)$ sa courbe dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ ; puis donner une interprétation géométrique au résultat.

2) Montrer que $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ ; puis interpréter géométriquement le résultat.

3) Montrer que : $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x(1+x)^2}$

  a) Etudier le signe de $f'(x)$ ; puis dresser le tableau de variation de f sur $]0;+\infty[$.

  b) Montrer que : $f(\alpha)=\dfrac{1}{\alpha}$.

  c) Déduire que : $\dfrac{1}{e^2}<\dfrac{\ln(\alpha)}{1+\alpha}<\dfrac{1}{e}$

4) Construire $(C_f)$ dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

5) Soit h la restriction de f à l'intervalle $]0\ ;\alpha[$ ;

  a) Montrer que h admet une fonction réciproque $h^{-1}$ définie sur un intervalle J à déterminer.

  b) Montrer que $h^{-1}$ est dérivable en $\dfrac{1}{1+e}$ et calculer $(h^{-1})'\left(\dfrac{1}{1+e}\right)$

  (sachant que $f(e)=\dfrac{1}{1+e}$).