

Correction du sujet de mathématiques - Session de Juillet 2020

2ème Bac - Série Sciences Expérimentales

Exercice 1

$$(u_n): \begin{cases} u_0 = \frac{3}{2} \\ u_{n+1} = \frac{2u_n}{2u_n + 5} ; \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 1) \text{ On a : } u_1 &= \frac{2u_0}{2u_0 + 5} \\ &= \frac{2 \times \frac{3}{2}}{2 \times \frac{3}{2} + 5} \\ &= \frac{3}{8} \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } \boxed{u_1 = \frac{3}{8}}$$

2) Montrons par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n > 0$

Pour $n=0$

$$u_0 = \frac{3}{2} \text{ donc } u_0 > 0$$

Soit $n \in \mathbb{N}$

Supposons que $u_n > 0$ et montrons que $u_{n+1} > 0$

$$\begin{aligned} \text{On a : } u_n > 0 &\Rightarrow \begin{cases} 2u_n > 0 \\ 2u_n + 5 > 0 \end{cases} \\ &\Rightarrow \frac{2u_n}{2u_n + 5} > 0 \\ &\Rightarrow u_{n+1} > 0 \end{aligned}$$

Conclusion

On a montré par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; \boxed{u_n > 0}$

3) a) Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 < u_{n+1} \leq \frac{2}{5}u_n$

D'après la question 2) on a montré que $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} > 0$

Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} \leq \frac{2}{5}u_n$

$$\text{On a pour tout } n \in \mathbb{N} : u_{n+1} - \frac{2}{5}u_n = \frac{2u_n}{2u_n + 5} - \frac{2}{5}u_n$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{5 \times 2u_n - 2u_n(2u_n + 5)}{5 \times (2u_n + 5)} \\
&= \frac{10u_n - (2u_n)^2 - 10u_n}{5 \times (2u_n + 5)} \\
&= -\frac{(2u_n)^2}{5 \times (2u_n + 5)}
\end{aligned}$$

Comme $2u_n + 5 > 0$ d'après la question 2).

donc : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} \leq \frac{2}{5}u_n$.

D'où $(\forall n \in \mathbb{N}) ; \boxed{0 < u_{n+1} \leq \frac{2}{5}u_n}$

On a : $0 < u_n \leq \frac{2}{5}u_{n-1}$

$$0 < u_{n-1} \leq \frac{2}{5}u_{n-2}$$

$$0 < u_{n-2} \leq \frac{2}{5}u_{n-3}$$

$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$

$$0 < u_1 \leq \frac{2}{5}u_0$$

En multipliant membre à membre les n-inegalités on obtient :

$$0 < u_n \leq \underbrace{\frac{2}{5} \times \frac{2}{5} \times \dots \times \frac{2}{5}}_{n \text{ fois}} u_0 \Rightarrow 0 < u_n \leq \frac{3}{2} \left(\frac{2}{5} \right)^n$$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; \boxed{0 < u_n \leq \frac{3}{2} \left(\frac{2}{5} \right)^n}$

2ème méthode

On peut montrer l'inégalité par récurrence.

On peut procéder de la façon suivante :

$$\text{On a : } 0 < u_n \leq \frac{2}{5}u_{n-1} \leq \frac{2}{5} \times \frac{2}{5}u_{n-2} \leq \dots \leq \underbrace{\frac{2}{5} \times \frac{2}{5} \times \dots \times \frac{2}{5}}_{n \text{ fois}} u_0$$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; \boxed{0 < u_n \leq \frac{3}{2} \left(\frac{2}{5} \right)^n}$.

b) on a pour $n \in \mathbb{N} : 0 < u_n \leq \frac{3}{2} \left(\frac{2}{5} \right)^n$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{2} \left(\frac{2}{5} \right)^n = 0$ (car $-1 < \frac{2}{5} < 1$).

Donc : $\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0}$ (théorème des gendarmes)

4) Pour $n \in \mathbb{N}$; on pose : $v_n = \frac{4u_n}{2u_n + 3}$

a) Soit $n \in \mathbb{N}$; on a : $v_{n+1} = \frac{4u_{n+1}}{2u_{n+1} + 3}$

$$\begin{aligned}
&= \frac{4 \times \frac{2u_n}{2u_n + 5}}{2 \times \frac{2u_n}{2u_n + 5} + 3} \\
&= \frac{2 \times 4u_n}{4u_n + 3(2u_n + 5)} \\
&= \frac{2 \times 4u_n}{10u_n + 15} \\
&= \frac{2 \times 4u_n}{5 \times (2u_n + 3)} \\
&= \frac{2}{5} \times \frac{4u_n}{2u_n + 3}
\end{aligned}$$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N}); \boxed{v_{n+1} = \frac{2}{5} \times v_n}$

D'où : (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{2}{5}$ et de premier terme

$$v_0 = \frac{4u_0}{2u_0 + 3} = \frac{4 \times \frac{3}{2}}{2 \times \frac{3}{2} + 3} = 1$$

b) on a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = v_0 \times q^n \Rightarrow v_n = \left(\frac{2}{5}\right)^n$

D'où : $(\forall n \in \mathbb{N}); \boxed{v_n = \left(\frac{2}{5}\right)^n}$

Et pour tout $n \in \mathbb{N}; v_n = \frac{4u_n}{2u_n + 3} \Rightarrow (2u_n + 3)v_n = 4u_n$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow 2u_n \times v_n - 4u_n = -3v_n \\
&\Rightarrow u_n \times (2v_n - 4) = -3v_n \\
&\Rightarrow u_n = \frac{-3v_n}{2v_n - 4} \\
&\Rightarrow u_n = \frac{3v_n}{4 - 2v_n}
\end{aligned}$$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N}); \boxed{u_n = \frac{3 \times \left(\frac{2}{5}\right)^n}{4 - 2 \times \left(\frac{2}{5}\right)^n}}$

Exercice 2.

1) Soit l'équation (E): $z^2 - 2(\sqrt{2} + \sqrt{6})z + 16 = 0$

a) Vérifions que le discriminant de l'équation (E) est $\Delta = -4(\sqrt{6} - \sqrt{2})^2$

Calculons Δ ce discriminant

On a : $a=1$; $b=-2(\sqrt{2}+\sqrt{6})$ et $c=16$.

$$\blacktriangleright \Delta = b^2 - 4ac$$

$$\begin{aligned} &= (-2(\sqrt{2}+\sqrt{6}))^2 - 4 \times 16 \\ &= 4(\sqrt{2}+\sqrt{6})^2 - 4 \times 16 \\ &= 4(\sqrt{2}^2 + 2\sqrt{6}\sqrt{2} + \sqrt{6}^2) - 4 \times 16 \\ &= 4(2 + 2\sqrt{6}\sqrt{2} + 6) - 4 \times 16 \\ &= 4(2\sqrt{6}\sqrt{2} + 8 - 16) \\ &= 4(2\sqrt{6}\sqrt{2} - 8) \\ &= -4(8 - 2\sqrt{6}\sqrt{2}) \\ &= -4(\sqrt{6}^2 - 2\sqrt{6}\sqrt{2} + \sqrt{2}^2) \\ &= -4(\sqrt{6} - \sqrt{2})^2 \end{aligned}$$

$$\text{D'où : } \boxed{\Delta = -4(\sqrt{6} - \sqrt{2})^2}$$

2ème méthode : on peut arrêter les calculs à : $4(2\sqrt{6}\sqrt{2} - 8) = -32 + 8\sqrt{6}\sqrt{2}$

Et développer $-4(\sqrt{6} - \sqrt{2})^2$ et puis trouver que : $-4(\sqrt{6} - \sqrt{2})^2 = -32 + 8\sqrt{6}\sqrt{2}$ puis

déduire que $\boxed{\Delta = -4(\sqrt{6} - \sqrt{2})^2}$

(E) admet deux solutions complexes conjuguées ; soient :

$$\begin{aligned} \bullet) z_1 &= \frac{-b - i\sqrt{|\Delta|}}{2a} \\ &= (\sqrt{2} + \sqrt{6}) - i(\sqrt{6} - \sqrt{2}) \end{aligned}$$

$$\bullet) z_2 = (\sqrt{2} + \sqrt{6}) + i(\sqrt{6} - \sqrt{2})$$

Donc les solutions de (E) sont les nombres complexes : $\boxed{z_1 = (\sqrt{2} + \sqrt{6}) - i(\sqrt{6} - \sqrt{2})}$ et

$$\boxed{z_2 = (\sqrt{2} + \sqrt{6}) + i(\sqrt{6} - \sqrt{2})}$$

$$2) a = (\sqrt{2} + \sqrt{6}) + i(\sqrt{6} - \sqrt{2}) ; b = 1 + i\sqrt{3} \text{ et } c = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} \text{a) on a : } b\bar{c} &= (1 + i\sqrt{3})(\sqrt{2} - i\sqrt{2}) \\ &= \sqrt{2} - i\sqrt{2} + i\sqrt{6} + \sqrt{6} \\ &= (\sqrt{2} + \sqrt{6}) + i(\sqrt{6} - \sqrt{2}) \\ &= a \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } \boxed{b\bar{c} = a}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } \bullet) \text{ On a : } b &= 1 + i\sqrt{3} \\
 &= 2 \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\
 &= 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)
 \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } \boxed{b = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)}$$

$$\begin{aligned}
 \bullet) \text{ On a : } c &= \sqrt{2} + i\sqrt{2} \\
 &= 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \\
 &= 2 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)
 \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \boxed{c = 2 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c) D'après la question 2)a) on a : } b\bar{c} = a &\Rightarrow |a| = |b\bar{c}| \\
 &\Rightarrow |a| = |b||\bar{c}| \\
 &\Rightarrow |a| = 2 \times 2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Donc } |a| &= 4 \text{ et } \arg(a) \equiv \arg(b\bar{c}) [2\pi] \\
 &\equiv \arg(b) + \arg(\bar{c}) [2\pi] \\
 &\equiv \arg(b) - \arg(c) [2\pi] \\
 &\equiv \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} [2\pi] \\
 &\equiv \frac{\pi}{12} [2\pi]
 \end{aligned}$$

$$\text{D'où : } \boxed{a = 4 \left(\cos \left(\frac{\pi}{12} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{12} \right) \right)}$$

3) Soient $B(b = 1 + i\sqrt{3})$; $C(c = \sqrt{2} + i\sqrt{2})$ et $D(d = a^4)$.

R : la rotation de contre 0 et d'angle $\frac{\pi}{12}$.

$$\begin{aligned}
 \text{a) on a : } M'(z') &= R(M(Z)) \Leftrightarrow (z' - 0) = (z - 0)e^{i\frac{\pi}{12}} \\
 &\Leftrightarrow z' = ze^{i\frac{\pi}{12}}
 \end{aligned}$$

$$\text{On a : } a = 4e^{i\frac{\pi}{12}} \Rightarrow e^{i\frac{\pi}{12}} = \frac{1}{4}a$$

$$\text{D'où : } \boxed{M'(z') = R(M(Z)) \Leftrightarrow z' = \frac{1}{4}az}$$

b) Soit $C'(c')$ image de $C(c)$ par R ; on a :

$$C'(c') = R(C(c)) \Leftrightarrow c' = \frac{1}{4}ac$$

$$\Leftrightarrow c' = \frac{1}{4} b \bar{c} c$$

$$\Leftrightarrow c' = \frac{1}{4} b |c|^2$$

$$\Leftrightarrow c' = \frac{1}{4} b \times 4$$

$$\Leftrightarrow c' = b$$

Donc l'image du point C par la rotation R est le point B.

c) on a B est l'image de C par la rotation R; donc :

$$(b - 0) = (c - 0) e^{i\frac{\pi}{12}} \Rightarrow |b - 0| = |c - 0|$$

$$\Rightarrow OB = OC$$

D'où le triangle OBC est isocèle.

d) On a : $a = 4 \left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \right)$

D'après la formule de Moivre ; on a : $a^4 = 4^4 \left(\cos\left(4 \times \frac{\pi}{12}\right) + i \sin\left(4 \times \frac{\pi}{12}\right) \right)$

$$= 256 \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right)$$

$$= 128 \times 2 \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right)$$

$$= 128b \quad (\text{Car } b = 2 \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right))$$

Donc : $a^4 = 128b$.

D'où : $d = 128b$

$$d = 128b \Leftrightarrow \frac{d}{b} = 128 \in \mathbb{R}$$

Par suite les points O ; D et B sont alignées.

Exercice 3

$$g(x) = 2\sqrt{x} - 2 - \ln x$$

1) a) g est dérivable comme somme de fonctions dérivables et pour tout $x \in]0; +\infty[$ on a :

$$g'(x) = (2\sqrt{x} - 2 - \ln x)'$$

$$= 2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x}$$

$$= \frac{\sqrt{x} - 1}{x}$$

Donc : $(\forall x \in]0; +\infty[); g'(x) = \frac{\sqrt{x} - 1}{x}$

b) On a : $x \geq 1 \Rightarrow \sqrt{x} \geq 1$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{x}-1}{x} \geq 0$$

$$\Rightarrow g'(x) \geq 0$$

Donc g est croissante sur $[1; +\infty[$.

c) Soit $x \in [1; +\infty[$, alors :

•) $x \geq 1 \Rightarrow g(x) \geq g(1)$ (Car g est croissante sur $[1; +\infty[$).

$$\Rightarrow g(x) \geq 0 \quad (\text{Car } g(1) = 0)$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{x} - 2 - \ln x \geq 0$$

$$\Rightarrow \ln x \leq 2\sqrt{x} - 2$$

$$\Rightarrow \ln x \leq 2\sqrt{x} \quad (\text{Car } 2\sqrt{x} \geq 2\sqrt{x} - 2)$$

•) $x \geq 1 \Rightarrow \ln x \geq 0$.

D'où : $(\forall x \in [1; +\infty[) : \boxed{0 \leq \ln x \leq 2\sqrt{x}}$

d) Pour tout $x \in [1; +\infty[$ on a : $0 \leq \ln x \leq 2\sqrt{x} \Rightarrow 0 \leq (\ln x)^3 \leq (2\sqrt{x})^3$

$$\Rightarrow 0 \leq \frac{(\ln x)^3}{x^2} \leq \frac{8x\sqrt{x}}{x^2}$$

$$\Rightarrow 0 \leq \frac{(\ln x)^3}{x^2} \leq \frac{8}{\sqrt{x}}$$

Donc : $(\forall x \in [1; +\infty[) : \boxed{0 \leq \frac{(\ln x)^3}{x^2} \leq \frac{8}{\sqrt{x}}}$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8}{\sqrt{x}} = 0$

Alors $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^3}{x^2} = 0}$ (théorème des gendarmes)

2) a) pour tout $x \in]0; +\infty[$; on a :

$$G'(x) = \left(x \left(-1 + \frac{4}{3}\sqrt{x} - \ln x \right) \right)'$$

$$= \left(-1 + \frac{4}{3}\sqrt{x} - \ln x \right) (x)' + x \left(-1 + \frac{4}{3}\sqrt{x} - \ln x \right)'$$

$$= -1 + \frac{4}{3}\sqrt{x} - \ln x + x \left(\frac{4}{3 \times 2\sqrt{x}} - \frac{1}{x} \right)$$

$$= -1 + \frac{4}{3}\sqrt{x} - \ln x + \frac{2}{3}\sqrt{x} - 1$$

$$= 2\sqrt{x} - 2 - \ln x$$

$$= g(x)$$

Donc la fonction G est une primitive de g sur $]0; +\infty[$.

b) G est une primitive de g sur $]0; +\infty[$ donc :

$$\begin{aligned} \int_1^4 g(x) dx &= [G(x)]_1^4 \\ &= G(4) - G(1) \\ &= 4 \left(-1 + \frac{4}{3} \sqrt{4} - \ln 4 \right) - 1 \left(-1 + \frac{4}{3} \sqrt{1} - \ln 1 \right) \\ &= 4 \left(-1 + \frac{8}{3} - 2 \ln 2 \right) + 1 - \frac{4}{3} \\ &= -\frac{12}{3} + \frac{32}{3} - 8 \ln 2 - \frac{1}{3} \\ &= \frac{19}{3} - 8 \ln 2 \end{aligned}$$

Donc : $\boxed{\int_1^4 g(x) dx = \frac{19}{3} - 8 \ln 2}$

Problème

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -x + \frac{5}{2} - \frac{1}{2}e^{x-2}(e^{x-2} - 4)$

1) ► Montrons que : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

On a : • $\lim_{x \rightarrow -\infty} -x + \frac{5}{2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -x = +\infty$

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} x - 2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x-2} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x-2} - 4 = -4 \end{cases}$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x-2}(e^{x-2} - 4) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x e^{-2}(e^x e^{-2} - 4) = 00$$

(Car $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$)

D'où : $\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty}$

► Montrons que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

On a : • $\lim_{x \rightarrow +\infty} -x + \frac{5}{2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} -x = -\infty$

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - 2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x-2} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x-2} - 4 = +\infty \end{cases}$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2}e^{x-2}(e^{x-2} - 4) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2}e^x e^{-2}(e^x e^{-2} - 4) = -\infty$$

(Car $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$)

D'où : $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty}$

2) a) montrons que la droite (Δ) d'équation $y = -x + \frac{5}{2}$ est asymptote à la courbe au voisinage de $-\infty$.

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - \left(-x + \frac{5}{2}\right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x-2} (e^{x-2} - 4) = 0$$

$$(\text{Car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x-2} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x-2} - 4 = -4 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x-2} (e^{x-2} - 4) = 0)$$

D'où la droite (Δ) d'équation $y = -x + \frac{5}{2}$ est asymptote à la courbe au voisinage de $-\infty$.

b) Résolvons l'équation : $e^{x-2} - 4 = 0$

$$\text{On a : } e^{x-2} - 4 = 0 \Rightarrow e^{x-2} = 4$$

$$\Rightarrow x - 2 = \ln 4$$

$$\Rightarrow \boxed{x = 2 + \ln 4}$$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation $e^{x-2} - 4 = 0$ est $\boxed{S = \{2 + \ln 4\}}$

► Montrons que (C_f) est au-dessus de la droite (Δ) sur l'intervalle $]-\infty; 2 + \ln 4]$ et au-dessous de la droite (Δ) sur l'intervalle $[2 + \ln 4; +\infty[$.

Pour déterminer la position de (C_f) par rapport à (Δ) il faut étudier le signe de

$$f(x) - \left(-x + \frac{5}{2}\right)$$

$$\text{On a : } (\forall x \in \mathbb{R}) ; f(x) - \left(-x + \frac{5}{2}\right) = -\frac{1}{2} e^{x-2} (e^{x-2} - 4)$$

Donc le signe de $f(x) - \left(-x + \frac{5}{2}\right)$ est celui de $-(e^{x-2} - 4)$ (car $e^{x-2} > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$).

$$\text{On a : } \blacktriangleright -(e^{x-2} - 4) \leq 0 \Leftrightarrow e^{x-2} - 4 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow e^{x-2} \geq 4$$

$$\Leftrightarrow x - 2 \geq \ln 4$$

$$\Leftrightarrow x \geq 2 + \ln 4$$

$$\text{Donc : } f(x) - \left(-x + \frac{5}{2}\right) \leq 0 \Leftrightarrow x \geq 2 + \ln 4$$

D'où (C_f) au-dessous de la droite (Δ) sur l'intervalle $[2 + \ln 4; +\infty[$.

$$\blacktriangleright -(e^{x-2} - 4) \geq 0 \Leftrightarrow e^{x-2} - 4 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow e^{x-2} \leq 4$$

$$\Leftrightarrow x - 2 \leq \ln 4$$

$$\Leftrightarrow x \leq 2 + \ln 4$$

$$\text{Donc : } f(x) - \left(-x + \frac{5}{2}\right) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 2 + \ln 4$$

D'où (C_f) est au-dessus de la droite (Δ) sur l'intervalle $]-\infty; 2 + \ln 4]$.

3) ► Montrons que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-x + \frac{5}{2} - \frac{1}{2}e^{x-2}(e^{x-2} - 4)}{x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-1 + \frac{5}{2x} - \frac{1}{2} \frac{e^{x-2}}{x} (e^{x-2} - 4) \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-1 + \frac{5}{2x} - \frac{1}{2} \frac{e^x}{x} e^{-2} (e^{x-2} - 4) \right) \\ &= -\infty \end{aligned}$$

$$(\text{Car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-1 + \frac{5}{2x} \right) = -1 ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x}{x} \right) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{2} e^{-2} (e^{x-2} - 4) \right) = -\infty)$$

Donc : $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty}$

Interprétation géométrique

On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$ alors (C_f) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$.

4) a) Montrons que : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f'(x) = -(e^{x-2} - 1)^2$

Les fonctions : $x \mapsto -x + \frac{5}{2}$; $x \mapsto -\frac{1}{2}e^{x-2}$ et $x \mapsto e^{x-2} - 4$ étant toutes dérivables sur $\mathbb{R}$; la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$; et on a :

$$\begin{aligned} (\forall x \in \mathbb{R}) ; f'(x) &= \left[-x + \frac{5}{2} - \frac{1}{2}e^{x-2}(e^{x-2} - 4) \right]' \\ &= \left(-x + \frac{5}{2} \right)' - \frac{1}{2} \left(e^{x-2}(e^{x-2} - 4) \right)' \\ &= -1 - \frac{1}{2} \left[(e^{x-2})' (e^{x-2} - 4) + e^{x-2} (e^{x-2} - 4)' \right] \\ &= -1 - \frac{1}{2} \left[e^{x-2} (e^{x-2} - 4) + e^{x-2} e^{x-2} \right] \\ &= -1 - \frac{1}{2} \left[2(e^{x-2})^2 - 4e^{x-2} \right] \\ &= -1 - (e^{x-2})^2 + 2e^{x-2} \\ &= - \left((e^{x-2})^2 - 2e^{x-2} + 1 \right) \\ &= -(e^{x-2} - 1)^2 \end{aligned}$$

Donc : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; \boxed{f'(x) = -(e^{x-2} - 1)^2}$

b) Dressons le tableau de variation de f

$$\text{On a : } f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{x-2} - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow e^{x-2} = 1$$

$$\Leftrightarrow x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 2$$

$$\text{De plus : } (\forall x \in \mathbb{R}) ; f'(x) = -(e^{x-2} - 1)^2 \leq 0$$

D'où le tableau de variation de f :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	-
$f(x)$	$+\infty \searrow -\infty$		

5) Calculons $f''(x)$

La fonction $x \mapsto f'(x) = -(e^{x-2} - 1)^2$ étant dérivable sur $\mathbb{R}$; la fonction f est deux fois

$$\begin{aligned} \text{dérivable sur } \mathbb{R} ; \text{ et on a : } (\forall x \in \mathbb{R}) ; f''(x) &= \left[-(e^{x-2} - 1)^2 \right]' \\ &= -2(e^{x-2} - 1)'(e^{x-2} - 1) \\ &= -2e^{x-2}(e^{x-2} - 1) \end{aligned}$$

$$\text{On a : } f''(x) = 0 \Leftrightarrow e^{x-2} - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow e^{x-2} = 1$$

$$\Leftrightarrow x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 2$$

Le signe de $f''(x)$ est celui de $-(e^{x-2} - 1)$ (car $(\forall x \in \mathbb{R}) ; e^{x-2} > 0$)

Donc le tableau de signe de $f''(x)$ est le suivant :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$e^{x-2} - 1$	-	0	+
$-(e^{x-2} - 1)$	+	0	-
$f''(x)$	+	0	-

On remarque que $f''(x)$ s'annule en 2 ; et change de signe et :

$$\begin{aligned} \bullet f(2) &= -2 + \frac{5}{2} - \frac{1}{2}e^{2-2}(e^{2-2} - 4) \\ &= -\frac{4}{2} + \frac{5}{2} - \frac{1}{2}(1 - 4) \\ &= -\frac{4}{2} + \frac{5}{2} + \frac{3}{2} \\ &= 2 \end{aligned}$$

Donc le point A(2;2) est un point d'inflexion de (C_f) .

Remarque : On pouvait prévoir ce résultat sans passer par la dérivée seconde.

En effet, on remarque d'après le tableau de variations de f que $f'(x)$ s'annule en 2 sans changer de signe.

D'où le point $A(2; f(2))$ est un point d'inflexion de (C_f) .

6) Montrons que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α telle que :

$$2 + \ln 3 < \alpha < 2 + \ln 4$$

On a : • f est continue sur $\mathbb{R}$ et en particulier sur $[2 + \ln 3; 2 + \ln 4]$.

• f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ et en particulier sur $[2 + \ln 3; 2 + \ln 4]$.

$$\bullet f(2 + \ln 3) = -(2 + \ln 3) + \frac{5}{2} - \frac{1}{2} e^{2 + \ln 3 - 2} (e^{2 + \ln 3 - 2} - 4)$$

$$= -2 - \ln 3 + \frac{5}{2} - \frac{1}{2} e^{\ln 3} (e^{\ln 3} - 4)$$

$$= -\frac{4}{2} - \ln 3 + \frac{5}{2} - \frac{1}{2} 3(3 - 4)$$

$$= -\frac{4}{2} - \ln 3 + \frac{5}{2} + \frac{3}{2}$$

$$= 2 - \ln 3$$

$$\approx 2 - 1,1 > 0$$

$$\bullet f(2 + \ln 4) = -(2 + \ln 4) + \frac{5}{2} - \frac{1}{2} e^{2 + \ln 4 - 2} (e^{2 + \ln 4 - 2} - 4)$$

$$= -2 - \ln 4 + \frac{5}{2} - \frac{1}{2} e^{\ln 4} (e^{\ln 4} - 4)$$

$$= -2 - \ln 4 + \frac{5}{2} - \frac{1}{2} 4(4 - 4)$$

$$= -\frac{4}{2} - \ln 4 + \frac{5}{2}$$

$$= \frac{1}{2} - 2 \ln 2$$

$$\approx 0,5 - 1,4 < 0$$

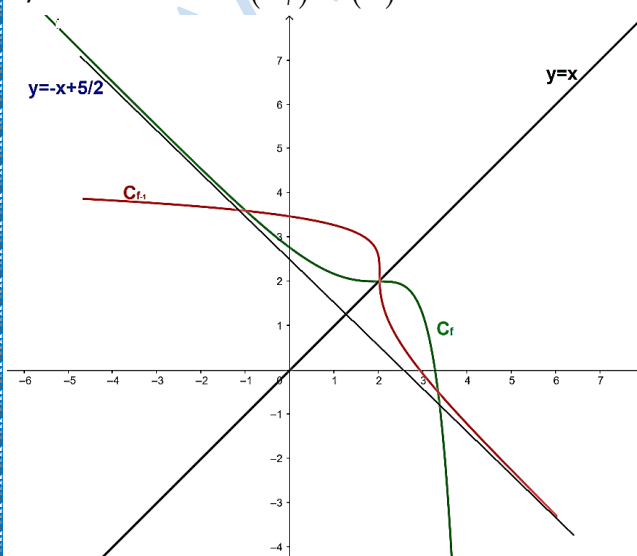
Finalement on a :

• f continue et strictement décroissante sur $[2 + \ln 3; 2 + \ln 4]$.

• $f(2 + \ln 3) \times f(2 + \ln 4) < 0$

D'où d'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle $[2 + \ln 3; 2 + \ln 4]$.

7) Construisons (C_f) et (Δ) .



8) a) Montrons que f admet une fonction réciproque définie sur $\mathbb{R}$.

- Les fonctions : $x \mapsto -x + \frac{5}{2}$ et $x \mapsto -\frac{1}{2}e^{x-2}(e^{x-2} - 4)$ étant continues sur $\mathbb{R}$; alors la

fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Donc f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur l'intervalle J tel que :

$$\begin{aligned} J = f(\mathbb{R}) &= f(]-\infty; +\infty[) \\ &=]\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)[\\ &=]-\infty; +\infty[\\ &= \mathbb{R} \end{aligned}$$

b) Construisons $(C_{f^{-1}})$ (voir courbes (C_f) et $(C_{f^{-1}})$ ci-haut)

(C_f) et $(C_{f^{-1}})$ sont symétriques par rapport à la 1^{ère} bissectrice.

c) Calculons $(f^{-1})'(2 - \ln 3)$

On a : $f(2 + \ln 3) = 2 - \ln 3 \Leftrightarrow f^{-1}(2 - \ln 3) = 2 + \ln 3$

La fonction f est dérivable en $(2 + \ln 3)$ et $f'(2 + \ln 3) \neq 0$

$$\begin{aligned} (f'(2 + \ln 3)) &= -(e^{2 + \ln 3 - 2} - 1)^2 \\ &= -(e^{\ln 3} - 1)^2 \\ &= -4 \neq 0 \end{aligned}$$

Donc f^{-1} est dérivable en $(2 - \ln 3)$ et :

$$\begin{aligned} (f^{-1})'(2 - \ln 3) &= \frac{1}{f'(f^{-1}(2 - \ln 3))} \\ &= \frac{1}{f'(2 + \ln 3)} \\ &= \frac{1}{-4} \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } \boxed{(f^{-1})'(2 - \ln 3) = -\frac{1}{4}}$$