CALCUL DE PROBABILITES

I- Vocabulaire des probabilités

Définitions 1.

On dit qu'une expérience est aléatoire si elle vérifie les deux conditions suivantes :
• On peut déterminer parfaitement, par avance, toutes les issues possibles ;
• On ne peut pas prévoir, par avance, laquelle de ces issues sera réalisée.
- On appelle **univers** *de l'expérience aléatoire, et on note* Ω *(lire Oméga), l'ensemble formé de toutes les issues possibles de cette expérience.*
- **Un événement** *est une partie de l'univers, formée d'une ou de plusieurs issues possibles.*
- **Un événement élémentaire** *est une partie de l'univers, formée d'une seule issue possible.*

Exemple 1.

Lancer un dé à 6 faces et noter le chiffre apparent sur la face supérieure, est une expérience aléatoire :
– Il y a 6 issues possibles ;
– L'univers de l'expérience est $\Omega=\{1\ ;\ 2\ ;3\ ;4\ ;5\ ;6\}$ *;*
– A = « le résultat est pair » est un événement écrit en langage courant; qu'on peut exprimer en langage symbolique comme un ensemble : $\mathrm{A}=\{2\ ;4\ ;6\}$ *.*
– B = « le résultat est un 6 » est un événement élémentaire écrit en langage courant; qu'on peut exprimer en langage symbolique comme un ensemble : $\mathrm{B}=\{6\}$ *. Noter que « 6 » est une issue possible, alors que l'événement B est un ensemble qui contient cette seule issue.*

Exemple 2.

Lancer une pièce de monnaie à 2 faces "Pile" ou "Face" et noter la face exposée, est une expérience aléatoire :
– Il n'y a que 2 issues possibles ;
– L'univers de l'expérience est $\Omega=\{P;F\}$ *;*
– A = « le résultat est Pile » et B = « le résultat est Face » sont des événements élémentaires écrits en langage courant; qu'on peut exprimer en langage symbolique : $\mathrm{A}=\{P\}$ *et* $\mathrm{B}=\{F\}$ *.* $\Omega=\{P;F\}$ *est aussi un événement.*

Définition 2.

L'univers Ω *d'une expérience aléatoire est aussi un événement, qu'on appelle* **l'événement certain***, alors que l'ensemble vide* $\emptyset$ *s'appelle l'événement vide ou encore* **l'événement impossible***.*

II. Probabilité d'un événement

2.1) Probabilité théorique

Définitions 3.

Pour certaines expériences aléatoires, sous certaines conditions, on peut déterminer en pourcentage ou par un quotient « la chance » qu'un événement a pour se réaliser.
Ce nombre s'appelle la « **probabilité** *» ou « probabilité théorique » de l'événement.*

Exemple 5.

Le lancer d'un dé à 6 faces parfaitement équilibré. On dit que le dé est non truqué. L'univers de l'expérience aléatoire est $\Omega=\{1\ ;\ 2\ ;3\ ;4\ ;5\ ;6\}$ *; On peut supposer donc que les six faces ont exactement la même chance d'apparaître.*

Par conséquent, **la probabilité** *de l'apparition de chaque face est de* $\frac{1}{6}$ *. Si on note :* E_1*: "obtenir la face 1", on a* $\mathrm{E}_1=\{1\}$ *et* $P(\mathrm{E}_1)=\frac{1}{6}$ *. On note de même* E_k*: "obtenir la face k",* $k=1;2;...6$ *, alors* $\mathrm{E}_k=\{k\}$ *et* $P(\mathrm{E}_k)=\frac{1}{6}$*. Ce qui donne :* $P(\mathrm{E}_k)=\frac{1}{6}\simeq 0{,}1666..$ *pour tout* $k=1;2;...6$ *.*

De même, si A ="le résultat est pair" alors $\mathrm{A}=\{2;4;6\}$ *et A a trois chances sur six d'être réalisé. Donc* $P(\mathrm{A})=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.

Remarque

La probabilité d'un événement est un nombre compris entre 0 et 1.

2.2) Probabilité et fréquence

Théorème 1.

Si on répète une expérience aléatoire un très grand nombre de fois, les fréquences de réalisation de n'importe quel événement se rapprochent et finissent par se stabiliser autour de la probabilité théorique de l'événement.

Remarque

Si on lance un dé plusieurs fois, même s'il est « parfaitement équilibré », nous ne sommes pas sûrs que chaque face aura « exactement » 1 chance sur 6 d'apparaître !! C'est pourquoi, nous parlons de « probabilité théorique » car, dans la pratique, les réalisations sont « aléatoires » donc imprévisibles. Mais le théorème nous affirme que, si on recommence un grand nombre de fois, nous nous approchons de cette probabilité théorique,...

2.3) Calcul des probabilités

Définition 4.

Pour définir les probabilités des événements associés à une expérience aléatoire, on définit les probabilités de tous les événements élémentaires. On dit qu'on a donné la loi de probabilité de cette expérience.

Exemple 8.

La loi de probabilité du lancer d'un dé parfaitement équilibré est donnée par : pour tout $\omega\in\Omega$. $P(\{\omega\})=\frac{1}{6}$.

On peut aussi écrire la loi de probabilité dans un tableau :

Issues ω	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*Total*
$P(\{\omega\})$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	*1*

***Théorème 2**. (très important)*

Dans une expérience aléatoire,

1. *la probabilité P(A) d'un événement est un nombre compris entre 0 et 1.* $0\le P(\mathrm{A})\le 1$
2. *En particulier :* $P(\varnothing)=0$ *et* $P(\Omega)=1$.
3. *la somme des probabilités de tous les événements élémentaires* E_k $(1\leqslant k\leqslant n)$ *est égale à 1 :*
   Si $\Omega=\{\omega_1;\omega_2;\omega_3;\ \dots\ ;\omega_n\}$ *où* ω_k *est l'issue élémentaire de l'évènement élémentaire* E_k *, alors*
   $P(\mathrm{E}_1)+P(\mathrm{E}_2)+\ \dots\ +P(\mathrm{E}_n)=1$.
4. *la probabilité d'un événement est égale à la somme des probabilités des événements élémentaires qui le constituent.*

2.4) Équiprobabilité

Définition 5.

Dans une expérience aléatoire, si tous les événements élémentaires ont la même probabilité d'être réalisés, on dit qu'on est dans une situation d'équiprobabilité ou que l'expérience aléatoire est équiprobable.

***Définition 6**.*

Si A est un ensemble fini, on appelle cardinal de A, et on note $\mathrm{card}(\mathrm{A})$ *, le nombre d'éléments dans A.*

***Théorème 3**.*

Dans une expérience aléatoire équiprobable ayant n événements élémentaires, on a :

1. *la probabilité de chaque événement élémentaire est égale à* $\frac{1}{n}$.
2. *la probabilité d'un événement quelconque A est donnée par*

$$P(\mathrm{A})=\frac{\textit{Nombre d'issues favorables}}{\textit{Nombre d'issues possibles}}=\frac{card(\mathrm{A})}{card(\Omega)}=\frac{k}{n}$$ *où k désigne le cardinal de A.*

2.5) Événement contraire

Définition 5.

Dans une expérience aléatoire, on appelle événement contraire d'un événement A, l'événement, noté $\overline{A}$ qui contient toutes les issues qui n'appartiennent pas à A. Autrement dit : Pour tout $\omega \in \Omega$: [$\omega \in \overline{A}$ si, et seulement si $\omega \notin A$].

Exemple 12.

Une urne contient dix cartes identiques numérotées de 1 à 10. L'expérience aléatoire consiste à tirer une carte de cette urne. L'univers Ω est l'ensemble des nombres entiers de 1 à 10. Soit l'événement A ="la carte tirée porte un numéro multiple de 3" donc $A = \{3;6;9\}$. *Card* $(A) = 3$ *et* $P(A) = \dfrac{card(A)}{card(\Omega)} = \dfrac{3}{10}$.

$\overline{A} = \{1;2;4;5;7;8;10\}$. *Card* $(\overline{A}) = 7$ *et* $P(\overline{A}) = \dfrac{card(A)}{card(\Omega)} = \dfrac{7}{10}$.

Remarque.

Si A est un événement qui contient p issues favorables (sur les n issues de Ω), alors $\overline{A}$ contient (n – p) issues favorables càd si $card(A) = p$ *alors* $card(\overline{A}) = n - p$.

Donc :
$$\begin{aligned} P(\overline{A}) &= \frac{card(\overline{A})}{card(\Omega)} \\ &= \frac{n-p}{n} \\ &= \frac{n}{n} - \frac{p}{n} \\ &= 1 - \frac{card(A)}{card(\Omega)} \\ &= 1 - P(A) \end{aligned}$$

Théorème 4.

Dans une expérience aléatoire, si A est un événement et $\overline{A}$ son événement contraire, alors :
$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

III. Intersection et réunion d'événements

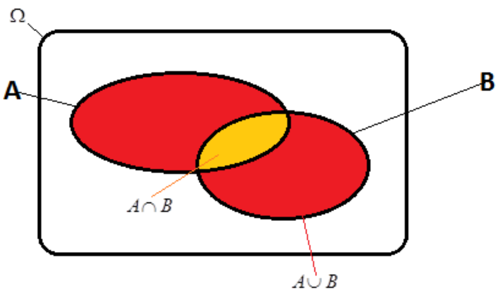
3.1) Vocabulaire

Définitions 6.

Dans une expérience aléatoire, on considère deux événements A et B.

a) *On appelle intersection des deux événements A et B et on note $A \cap B$, l'événement « A **et** B » qui est réalisé lorsque les deux événements A et B sont réalisés simultanément. Autrement dit :*
$A \cap B$ *est réalisé si et seulement si, A est réalisé **et** B est réalisé .*

b) *On appelle réunion des deux événements A et B et on note $A \cup B$, l'événement « A **ou** B » qui est réalisé lorsque l'un des deux événements A **ou** B est réalisé. Autrement dit : $A \cup B$ est réalisé si et seulement si, A est réalisé **ou** B est réalisé.*



<u>événements indépendants</u>
<u>Définitions 7</u>.

Dans une expérience aléatoire, on considère deux événements A et B.
On dit que A et B sont deux événements indépendants

<u>Exemple 14</u>

Une caisse contient 9 boules
(indiscernables au toucher)
- *5 boules Rouges portants les numéros : 0;0;0;1;1.*
- *4 boules Blanches portants les numéros : 0;0;0;1.*

On tire au hasard, simultanément trois boules de la caisse.
Soit les événements
A « les boules tirées sont de même couleur »
B « les boules tirées portent le même numéros»
C « les boules tirées sont de même couleur et portent le même numéro »

1. *Montrer que :* $P(A)=\frac{1}{6}$ *;* $P(B)=\frac{1}{4}$ *et* $P(C)=\frac{1}{42}$
2. *les événements A et B sont-ils indépendants !*

<u>Exemple 15</u>

Tirage d'une carte dans un jeu de 52 cartes (pas de joker).
– Il y a 52 issues possibles ;
– L'univers Ω *de l'expérience contient les 52 cartes ;*
– Toutes les cartes ont la même chance d'être tirées.
Donc, on est en situation d'équiprobabilité.
La loi de probabilité de cette expérience est : pour tout $\omega\in\Omega$. $P(\{\omega\})=\frac{1}{52}$.

– A « la carte tirée est un As » est un événement qui contient 4 issues favorables ; donc : $Card(A)=4$ *et* $Card(\Omega)=52$ *. Donc* $P(A)=\frac{card(A)}{card(\Omega)} = \frac{4}{52}$ *et* $P(A)=\frac{1}{13}$.

– L'événement T « la carte tirée est un Trèfle » contient 13 issues favorables. $Card(T)=13$ *et* $Card(\Omega)=52$*. Donc* $P(T)=\frac{card(T)}{card(\Omega)} = \frac{13}{52}$ *et* $P(A)=\frac{1}{4}$.

<u>événements incompatibles</u>
<u>Définitions 7</u>.

Dans une expérience aléatoire, on considère deux événements A et B.
a) On dit que A et B sont deux événements incompatibles lorsque les deux événements A et B ne peuvent pas se réaliser simultanément. Autrement dit : A et B sont incompatibles si et seulement si, $A\cap B=\varnothing$

<u>Exemple 16</u>.

Une urne contient dix cartes identiques numérotées de 1 à 10. L'expérience aléatoire consiste à tirer une carte de cette urne. L'univers Ω *est l'ensemble des nombres entiers de 1 à 10. On considère les événements suivants :*
• A "la carte tirée porte un numéro multiple de 3", donc $A=\{3;6;9\}$ *;*
• B "la carte tirée porte un numéro impair", donc $B=\{1;3;5;7;9\}$ *;*
• C "la carte tirée porte un numéro multiple de 4", donc $C=\{4;8\}$.
$A\cap B=$*" A et B" : "la carte tirée porte un numéro impair et multiple de 3" Donc* $A\cap B=\{3;9\}$.
A et B ne sont pas incompatibles car $A\cap B\neq\varnothing$.

Par contre : $A \cap C =$ " A et C" = "la carte tirée porte un numéro multiple de 3 et de 4" Donc $A \cap C = \varnothing$. Donc A et C sont deux événements incompatibles.
Cas particulier. Si A est un événement, alors A et $\overline{A}$ sont deux événements incompatibles.

3.2) <u>Probabilité d'une réunion</u>
<u>Théorème 5.</u>
Dans une expérience aléatoire, on considère deux événements A et B.
a) Si A et B sont deux événements quelconques, alors : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
b) Si A et B sont incompatibles, alors : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
<u>Démonstration.</u>
a) Pour démontrer ce résultat, il suffit de dénombrer (compter) les nombres d'éléments dans chaque ensemble. Dans $A \cup B$ si on additionne le nombre d'éléments de A et le nombre d'éléments de B, on aura compté 2 fois le nombre d'éléments de $A \cap B$. Donc, il faut le soustraire une fois. Ce qui donne :
$Card(A \cup B) = Card(A) + Card(B) - Card(A \cap B)$.
En divisant les deux membres par $Card(\Omega) = n$, on obtient :

$$P(A \cup B) = \frac{card(A)}{n} + \frac{card(B)}{n} - \frac{card(A \cap B)}{n}$$

D'où le résultat : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
b) Ce deuxième résultat est un cas particulier du
En effet, si A et B sont incompatibles, alors $A \cap B = \varnothing$. Comme P(A ∩ B) = P(∅) = 0.
D'où $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

<u>Exemple 17</u>.

Une Urne contient 9 boules (Indiscernables au toucher) :
- *4 boules Blanches numérotées 1,1,1,2*
- *3 boules Noires numérotées 1,2,2*
- *3 boules Noires numérotées 1,2*

On considère les événements suivants :
A « Les boules tirées sont de couleurs deux à deux distinctes »
B « Les boules tirées portent le même numéro »
B « Obtenir au moins une boule Noire »

1- *Montrer que : $P(A) = \frac{2}{7}$ et $P(B) = \frac{1}{6}$; puis calculer $P(C)$*
2- *a) Montrer que : $P(A \cap B) = \frac{5}{84}$*
   A et B sont-ils indépendants !
3- *Calculer $P(A \cup B)$.*

<u>Exemple 18</u>.

Dans une classe de Seconde de 35 élèves, option langues vivantes, 5 élèves font uniquement du russe, et parmi les trente autres, vingt font anglais et dix-huit font espagnol .On choisit au hasard un élève dans cette classe.
Calculer les probabilités de R = "l'élève fait du russe", A = "l'élève fait de l'anglais", E = "l'élève fait de l'espagnol", F = "l'élève fait du russe et de l'anglais" et G ="l'élève fait de l'anglais et de l'espagnol".

Ω *est l'ensemble des trente*-cinq élèves. On est dans une situation d'équiprobabilité.

■ $P(R)=\dfrac{card(R)}{card(\Omega)}=\dfrac{5}{35}=\dfrac{1}{7}$ ■ $P(A)=\dfrac{card(A)}{card(\Omega)}=\dfrac{20}{35}=\dfrac{4}{7}$ *et* ■ $P(E)=\dfrac{card(E)}{card(\Omega)}=\dfrac{18}{35}=\dfrac{4}{7}$ ■ *Il n'y a aucun élèves qui fait à la fois russe et anglais. Donc, les deux événements R et A sont incompatibles. Donc* $P(R\cap A)=P(\varnothing)=0$.

■ *D'après l'énoncé, 30 élèves font "anglais ou espagnol". Donc* $Card(A\cup E)=30$.

$P(A\cup E)=\dfrac{card(A\cup E)}{card(\Omega)}=\dfrac{30}{35}=\dfrac{6}{7}$. *Or :* $P(A\cup E)=P(A)+P(E)-P(A\cap E)$.

En remplaçant par les valeurs connues, on obtient : $\dfrac{6}{7}=\dfrac{4}{7}+\dfrac{18}{35}-P(A\cap E)$ *Donc :*

$P(A\cap E)=\dfrac{20}{35}+\dfrac{18}{35}-\dfrac{30}{35}$ *D'où :* $P(A\cap E)=\dfrac{8}{35}$

Conclusion : 8 élèves sur les 35 font "anglais et espagnol".

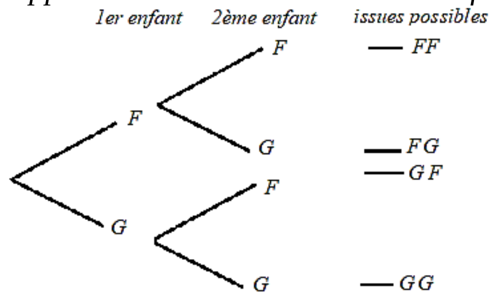
IV. Utiliser un arbre pour calculer des probabilités

4.1) 1ère situation :

Dénombrer toutes les issues possibles

Exemple 19.

Une famille a deux enfants. On suppose qu'il y a autant de chances d'obtenir un garçon qu'une fille. Calculer la probabilité des événements "obtenir deux filles" puis "obtenir deux enfants de sexes différents". (On suppose qu'il n'y a pas de jumeaux).
On appelle F l'événement "obtenir une fille" et G l'événement "obtenir un garçon" à chaque naissance :



L'univers associé à cette situation comporte quatre issues possibles.
Donc : $\Omega=\{FF;FG;GF;GG\}$ *. Ainsi, La probabilité d'obtenir deux filles est*

$P("FF")=\dfrac{\text{nombre d'issues favorables}}{\text{nombre d'issues possibles}}=\dfrac{1}{4}$

et si on appelle B = "obtenir deux enfants de sexes différents", on a : $B=\{FG;GF\}$ *et* $Card(B)=2$ *. Donc*

$P(B)=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$.

Remarque *: Pour trois enfants, faites un arbre et montrer qu'il y a 8 issues possibles !*

V. Probabilités conditionnelles

1.1) Définition de la probabilité conditionnelle

Définition :

Soit Ω un ensemble fini et P une loi de probabilité sur l'univers Ω liée à une expérience aléatoire. Soit A et B deux événements de Ω tels que $P(B) \neq 0$. On définit la probabilité que « A soit réalisé sachant que B est réalisé » de la manière suivante : $P_B(A) = \dfrac{P(B \cap A)}{P(B)}$ où $P_B(A)$ se lit « P-B-de-A » ou « P-de-A-sachant-B ».

En effet, dans cette définition, « l'univers est restreint à B ».
– L'ensemble de toutes les issues possibles est égal à B
– L'ensemble de toutes les issues favorables est égal à A∩B .

1.2) Étude d' exemples.

Exemple1

Un sac U contient 4 boules Blanches qui portent les numéros 0,0,0,1 ; 3 boules Rouges qui portent les numéros 0,1,1 et une boule Noire qui porte le numéro 1.
On tire de façon aléatoire simultanément 3 boules de la caisse (les boules sont indiscernables au toucher).
On considère les événements suivants :
A « Les boules tirées sont de même couleur »
B « Les boules tirées portent le même numéro »

1- Montrer que : $p(A) = \dfrac{5}{28}$ et calculer $p(B)$

2- Calculer la probabilité de l'événement A sachant que l'événement B est réalisé.

Exemple 2

On a deux sacs : un sac U contient 4 boules rouges et 4 boules bleus, et un sac V contient 2 boules rouges et 4 boules bleus.

- *On considère l'expérience suivante : On tire au hasard une boule du sac U,*
  Si la boule tirée est rouge, on la remet dans le sac V , puis on tire au hasard une boule du sac V
- *Si la boule tirée est bleu, on garde la à coté, puis on tire au hasard une boule du sac V. On considère les événements suivants :*

R_1 : la boule tirée de U est rouge B_1 : la boule tirée de U est bleu

R_2 : la boule tirée de V est rouge B_2 : la boule tirée de V est bleu

1) Calculer la probabilité de R_1 et B_1 .

2) Calculer la probabilité de B_2 sachant que R_1 est réalisée, et la probabilité de B_2 sachant que B_1 est réalisée.

3) Montrer que $p(B_2) = \dfrac{13}{21}$ et en déduire que $p(R_2)$

Exemple3

On considère l'univers Ω formé des trente élèves de la classe de Terminale. L'expérience aléatoire consiste à choisir un élève au hasard dans cette classe. On considère les deux événements suivants :
A = « l'élève choisi fait de l'allemand en LV1 » ; $\overline{A}$ est l'événement contraire.
F = « l'élève choisi est une fille » ; $\overline{F}$ est l'événement contraire.
Chacun de ces deux caractères partage Ω en deux parties : A et $\overline{A}$ ainsi que F et $\overline{F}$.
On obtient le tableau des effectifs suivants :

	F	$\overline{F}$	Totaux
A	10	7	17
$\overline{A}$	4	9	13
Totaux	14	16	30

Chaque élève a exactement la même chance d'être choisi. Nous sommes donc en situation d'équiprobabilité :
– La probabilité que l'élève choisi fasse de l'allemand est donnée par :

$$P(A)=\frac{\text{Nombre d'issues favorables}}{\text{Nombre d'issues possibles}}=\frac{cardA}{card\Omega}=\frac{17}{30}$$

– La probabilité que l'élève choisi soit une fille est donnée par :

$$P(F)=\frac{\text{Nombre d'issues favorables}}{\text{Nombre d'issues possibles}}=\frac{cardF}{card\Omega}=\frac{14}{30}$$

Maintenant, On choisit au hasard un élève qui fait allemand en LV1.
Calculer la probabilité que ce soit une fille.
<u>On change d'univers</u> : Le nouvel univers est A. L'élève choisi est donc dans A∩F

	F	$\overline{F}$	Totaux
A	10	7	17
$\overline{A}$	4	9	13
Totaux	14	16	30

– « On choisit un élève qui fait allemand en LV1 », la probabilité que cet élève soit une fille, notée $P_A(F)$,

est donnée par : $P_A(F)=\frac{\text{Nombre d'issues favorables}}{\text{Nombre d'issues possibles}}$

$$=\frac{cardA\cap F}{card\ A}=\frac{10}{17}$$

On peut encore écrire $P_A(F)$, de la façon suivante : $P_A(F)=\frac{card(A\cap F)}{card\Omega}\times\frac{card\Omega}{cardA}=P(A\cap F)\times\frac{1}{P(A)}$

ou encore : $P_A(F)=\frac{P(A\cap F)}{P(A)}$

<u>Conclusion :</u>
On peut exprimer « la probabilité de F, sachant que A est réalisé » comme quotient de $P(A\cap F)$ et de $P(A)$

<u>Conséquences immédiates</u> *:*
Soit A et B deux événements de Ω tels que $P(B)\neq 0$.

i) On peut écrire toutes les probabilités comme des probabilités conditionnelles. P(Ω)=1 . Donc pour tout événement A : $P(A)=P_\Omega(A)$.

ii) $P_B(B)=1$*PB (B)=1 ;* $P_B(\Omega)=1$ *;* $P_B(\varnothing)=0$.

iii) Si A et C sont deux événements quelconques, on peut étendre la formule vue en Seconde aux probabilités conditionnelles : $P_B(A\cup C)=P_B(A)+P_B(C)-P_B(A\cap C)$.

iv) Si A et C sont deux événements incompatibles, on a : $P_B(A\cup C)=P_B(A)+P_B(C)$

<u>Conséquence très importante :</u>
(en écrivant l'égalité des produits en croix) : Pour tous événements A et B de Ω tels que $P(B)\neq 0$, *on obtient la formule des probabilités composées :* $P(A\cap B)=P_B(A)\times P(B)$

<u>Exemple</u> *:*

Dans notre exemple ci-dessus, nous avons déjà calculé : $P_A(F)=\frac{10}{17}$ *et* $P(A)=\frac{17}{30}$.

On choisit un élève au hasard dans la classe. Calculer la probabilité que ce soit une fille qui fait de l'allemand. Ce qui correspond à l'événement $A\cap F$. Nous avons deux méthodes d'aborder cette question :

*– **<u>1ère méthode</u>** : Nous connaissons déjà les effectifs. Donc :* $P(A\cap F)=\frac{\text{Nombre d'issues favorables}}{\text{Nombre d'issues possibles}}$

$$=\frac{cardA\cap F}{card\ \Omega}=\frac{10}{30}$$

*– **<u>2ème méthode</u>** : Nous appliquons la formule ci-dessus :* $P(A\cap F)=P_A(F)\times P(A)=\frac{10}{\cancel{17}}\times\frac{\cancel{17}}{30}=\frac{10}{30}$

VI .VARIABLES ALÉATOIRES

1.1) Définition

On définit une **variable aléatoire** *en associant un nombre réel à chaque éventualité d'une expérience aléatoire.*

1.2) Étude d' exemples.

Exemple 1 *: (Bac 2017 session Normale)*

Une urne contient 8boules
(Indiscernables au toucher) portant chacun
Un numéro comme indique sur la figure ci-contre On tire au hasard, simultanément trois boules de l'urne.

1. *Soit les événements*
   A « parmi les trois boules tirées, aucune ne porte le numéro 0 »
   B «le produit des chiffres portes par les trois boules tirées est égale à 8»
   Montrer que : $P(A)=\frac{5}{14}$ *et* $P(B)=\frac{1}{7}$
2. *Soit X la variable aléatoire qui a chaque tirage associe le produit des chiffres portes par les trois boules tirées.*
   a) *Montrer que :* $P(X=16)=\frac{3}{28}$
   b) *Le tableau ci-contre concerne la loi de probabilité de la variable aléatoire X. Recopier sur votre copie et compléter le tableau en justifiant chaque réponse*

x_i	0	4	8	16
$p(X=x_i)$				$\frac{3}{28}$

Correction

On tire au hasard, simultanément trios boule de l'urne

1. A « Parmi les trois boule tirées, aucune ne porte le nombre 0 »
B «Le produit des nombres que portent les trois boule tirées est égale à 8»
A revient à tirer les trois boule parmi les 6 qui ne portent pas le nombre 0

$$Donc : P(\mathrm{A})=\frac{C_6^3}{C_8^3}=\frac{\frac{6!}{3!\times 3!}}{\frac{8!}{3!\times 5!}}=\frac{\frac{6\times5\times4}{3\times2\times1}}{\frac{8\times7\times6}{3\times2\times1}}=\frac{20}{56}=\frac{5}{14}$$

B revient à tirer • 3 boules tirées portent le même nombre 2.
Ou • 1 boule porte le nombre 2, 1 boule porte le nombre 4 et 1 boule porte le nombre 1.

$$Donc : P(\mathrm{B})=\frac{C_4^3+C_1^1\times C_1^1\times C_4^1}{C_8^3}=\frac{4+4}{56}=\frac{8}{56}=\frac{1}{7}$$

2. X lie au produit des nombres que portent les trois boules tirées.

a) $X=16$ *donc le tirage* $(2;2;4)$

$$donc : P(\mathrm{X}=16)=\frac{C_4^2\times C_1^1}{56}=\frac{6\times1}{56}=\frac{3}{28}$$

b) *tableau de la loi de probabilité de X*

x_i	*0*	*4*	*8*	*16*
$P(X=x_i)$	$\frac{9}{14}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{3}{28}$

• $X=0$ «tirer au moins une boule qui porte le nombre 0 » c'est $\overline{\mathrm{A}}$

$$P(X=0)=P(\overline{\mathrm{A}})=1-P(\mathrm{A})=1-\frac{5}{14}=\frac{9}{14}$$

• $X=8$ c'est l'événement B *donc* : $P(X=8)=\frac{1}{7}$

• *donc* : $P(X=4)=1-p(X=16)-p(X=8)-p(X=0)$

$$=1-\frac{3}{28}-\frac{1}{7}-\frac{9}{14}=\frac{3}{28}$$

<u>Exemple 2</u> :

Une urne contient 7 boules (3 noires et 4 blanches) indiscernables au toucher.
On considère l'épreuve suivante ;on tire une boule de l'urne :
-si la boule tirée est noire, on la remet dans l'urne ;
-si la boule tirée est blanche, on ne la remet pas dans l'urne.
On effectue cette épreuve trois fois de suite . Soit X la variable aléatoire qui à chaque ensemble Des trois tirages successifs associe le nombre de boules blanches restant dans l'urne après les Trois tirages .
1) Quelles sont les valeurs prise par X ?
2) Montrer que $p(X=1)=\frac{4}{35}$ *et que* $p(X=2)=\frac{107}{245}$
3) Donner la loi de probabilité de X *.*

<u>Exemple 3</u>
On lance 4 fois une pièce de monnaie. On peut définir une variable aléatoire égale au nombre de « faces » obtenues.
Les valeurs possibles pour cette variable sont : 0; 1; 2; 3 ou 4.

<u>NOTATIONS</u>
- *On note généralement une variable aléatoire à l'aide d'une lettre majuscule (le plus souvent X)*
- *Si la variable aléatoire X peut prendre les valeurs* $x_1;x_2;......;x_n$,

  on note $(X=x_i)$ *l'évènement : « X prend la valeur* x_i *»*

1.3) <u>Définition</u>
La loi de probabilité d'une variable aléatoire X associe à chaque valeur x_i *prise par X la probabilité de l'événement* $(X=x_i)$ *.*
On la représente généralement sous forme de tableau.

***<u>Exemple</u>** : On reprend l'exemple2*
Si on lance 4 fois une pièce de monnaie équilibrée, on montre à l'aide d'un arbre que la variable aléatoire X donnant le nombre de « faces » obtenues suit la loi de probabilité donnée par le tableau ci-dessous :

x_i	0	1	2	3	4
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$

<u>DÉFINITION (ESPÉRANCE MATHÉMATIQUE)</u>

Soit X une variable aléatoire qui prend les valeurs x_i *avec les probabilités* p_i *ou* $p_i=p(X=x_i)$.
*On appelle **espérance mathématique** de X le nombre :*
$E(X)=x_1\times p_1+x_2\times p_2+...+x_n\times p_n$.

<u>DÉFINITION (VARIANCE – ECART-TYPE)</u>

Soit X une variable aléatoire d'espérance mathématique $E(X)$.
*La **variance** de la variable aléatoire X est le nombre réel positif :*
$V(X)=E(X^2)-(E(X))^2$
*L'**écart-type** est égal à la racine carrée de la variance :*
$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$

VII . Loi Binomiale

DÉFINITION

On appelle ***épreuve de Bernoulli*** *de paramètre p (avec* $0 < p < 1$ *) une expérience aléatoire ayant deux issues :*

- *l'une appelée* ***succès*** *(généralement notée S) de probabilité p,*
- *l'autre appelée* ***échec*** *(généralement notée* $\overline{S}$ *) de probabilité 1−p.*

DÉFINITION

On considère la variable aléatoire X qui vaut 1 en cas de succès et 0 en cas d'échec.
Cette variable aléatoire suit la ***loi de Bernoulli de paramètre p****, définie par le tableau suivant:*

x_i	*0*	*1*
$P(X = x_i)$	$1 - p$	p

THÉORÈME

Soit X une variable aléatoire de loi binomiale de paramètres n et p .(on dit qu'elle suit une loi B(n;p)).
Pour tout entier k compris entre 0 et n :

$$p(X = k) = C_n^k \, p^k (1 - p)^{n-k}$$

EXEMPLE

On lance 8 fois une pièce équilibrée et on appelle X la variable aléatoire qui compte le nombre de fois où l'on obtient Pile.

X suit une loi binomiale de paramètres $n = 8$ *et* $p = \dfrac{1}{2}$.

La probabilité d'obtenir ***4 fois*** *Pile (par exemple) est :* $p(X = 4) = C_8^4 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^4 \times \left(1 - \dfrac{1}{2}\right)^{8-4}$

Donc : $p(X = 4) = 70 \times \dfrac{1}{16} \times \dfrac{1}{16} = \dfrac{70}{256} = \dfrac{35}{128}$.