Correction Examen National 2018 Rattrapage
2 Bac SM A et B

Exercice 1

1) E est une partie non vide de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ car $I = M(1,0) \in E$

Soit $M(x,y)$ et $M(x',y')$ deux matrices de E ; alors :

$$M(x,y) - M(x',y') = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x' & y' \\ 0 & x' \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} x-x' & y-y' \\ 0 & x-x' \end{pmatrix}$$
$$= M(x-x', y-y') \in E \quad (car\ (x-x', y-y') \in \mathbb{R}^2\ )$$

D'où E est un sous-groupe de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+)$

2) a) D'abord E est une partie non vide $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\bullet)$ est un espace vectoriel réel.

Soit $M(a,b)$ et $M(c,d)$ deux matrices de E et α un réel ; alors :

$$\alpha M(a,b) + M(c,d) = \alpha \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \alpha a + c & \alpha b + d \\ 0 & \alpha a + c \end{pmatrix}$$
$$= M(\alpha a + c, \alpha b + d) \in E \quad (car\ (\alpha a + c, \alpha b + d) \in \mathbb{R}^2\ )$$

Donc E est un sous-espace vectoriel réel de l'espace vectoriel $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\bullet)$

Soit $M(x,y)$ une matrice de E

$$M(x,y) = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= x\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= xI + yJ \qquad \text{où } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc (I, J) est une famille génératrice de E.

Soient α et β deux réels ; on a : $\alpha I+\beta J=M(0,0)\Leftrightarrow \alpha\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}\alpha&\beta\\0&\alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \alpha=\beta=0$$

Donc (I,J) est libre ; alors c'est une base de E et on a $\dim E$ est le nombre d'éléments de (I,J) ; d'où $\dim E=2$

3) a) E est une partie non vide $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$; Soient $M(a,b)$ et $M(c,d)$ deux matrices de E

$$\text{On a : } M(a,b)\times M(c,d)=\begin{pmatrix}a&b\\0&a\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}c&d\\0&c\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}ac&ad+bc\\0&ac\end{pmatrix}$$

$$=M(ac,ad+bc)\in E \quad (\text{car } (ac,ad+bc)\in\mathbb{R}^2)$$

Donc E est une partie stable de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$.

b) Pour montrer que $(E,+,\times)$ est un anneau unitaire et commutatif ; on vérifie les assertions suivantes :

- $(E,+)$ est un groupe abélien
- $\times$ est une loi associative.
- $\times$ est distributive par rapport à $+$ dans E.
- $\times$ admet un élément neutre.
- $\times$ est commutative dans E.

On a :

- E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\bullet)$; donc la première assertion est vérifiée.
- La 2iéme et la 3iéme assertions sont vérifiées du fait que E est une partie stable de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$ et que $\times$ est une loi associative distributive par rapport à $+$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- La 4iéme assertion est sont vérifiée car $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ est l'élément neutre pour la loi $\times$ dans E.
- Pour la dernière assertion ; Soient $M(a,b)$ et $M(c,d)$ deux matrices de E

$$\text{On a : } M(a,b)\times M(c,d)=\begin{pmatrix}a&b\\0&a\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}c&d\\0&c\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}ac&ad+bc\\0&ac\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ca & da+cb \\ 0 & ca \end{pmatrix}$$

$$= M(c,d) \times M(a,b)$$

Donc $\times$ est commutative dans E.

Par suite $(E,+,\times)$ est un anneau unitaire et commutatif

4) a) Soient $M(a,b)$ et $M(c,d)$ deux élément de E ; on a :

$$M(a,b) \mathrm{T} M(c,d) = M(a,b) \times M(c,d) - M(b,0) \times M(d,0)$$

$$= \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ac & ad+bc \\ 0 & ac \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} bd & 0 \\ 0 & bd \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ac-bd & ad+bc \\ 0 & ac-bd \end{pmatrix}$$

$$= M(ac-bd, ad+bc) \in E$$

Donc E est une partie stable par rapport à la loi T.

b) Soient (a,b) et (c,d) deux couples de $\mathbb{R}^2$; on a :

$$\varphi(a+ib) \mathrm{T} \varphi(c+id) = M(a,b) \mathrm{T} M(c,d)$$

$$= M(ac-bd, ad+bc)$$

$$= \varphi((a+ib) \times (c+id))$$

D'où $\varphi(a+ib) \mathrm{T} \varphi(c+id) = \varphi(a+ib) \times \varphi(c+id)$

Donc φ est un homomorphisme de $(\mathbb{C}^*, \times)$ vers (E, T)

c) Soit $M(a,b)$ une matrice de E^* ; résolvons dans $\mathbb{C}^*$ l'équation : $\varphi(z) = M(a,b)$.

On a : $\varphi(z) = M(a,b) \Leftrightarrow \varphi(x+iy) = M(a,b)$

$$\Leftrightarrow M(x,y) = M(a,b)$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ y = b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow z = a+ib$$

D'où l'équation $\varphi(z) = M(a,b)$ admet une solution unique ; donc elle réalise une bijection de $(\mathbb{C}^*, \times)$ vers (E^*, T) ; l'élément $M(0,0)$ est exclu pour φ car il n'est pas inversible par la loi T.

Ainsi φ est un isomorphisme de $(\mathbb{C}^*, \times)$ vers (E^*, T) ; et comme $(\mathbb{C}^*, \times)$ est un groupe commutatif ; alors φ transmis cette structure à $\varphi((\mathbb{C}^*, \times)) = (E^*, \mathrm{T})$.

De plus a pour élément neutre $\varphi(1+0i)=M(1,0)$; et tout élément $M(x,y)$ de E admet un inverse $M\left(\frac{x}{x^2+y^2},\frac{-y}{x^2+y^2}\right)$ dans E.

5) a) Soient $M(x,y)$; $M(x',y')$ et $M(x'',y'')$ trois éléments de E ; on a :

$$\begin{cases} M(x,y)+M(x',y')=M(x+x',y+y') \\ M(x,y)\times M(x',y')=M(xx'-yy',xy'+x'y) \end{cases}$$

Et d'une part :

$$\begin{aligned} M(x,y)\mathrm{T}\left(M(x',y')+M(x'',y'')\right) &= M(x,y)\mathrm{T}M(x'+x'',y'+y'') \\ &= M\left(x(x'+x'')-y(y'+y''),x(y'+y'')+y(x'+x'')\right) \\ &= M\left(xx'+xx''-yy'-yy'',xy'+xy''+yx'+yx''\right) \end{aligned}$$

Et d'autre part :

$$\begin{aligned} \left(M(x,y)\mathrm{T}M(x',y')\right)+\left(M(x,y)\mathrm{T}M(x'',y'')\right) &= M(xx'-yy',xy'+x'y)+M(xx''-yy'',xy''+x''y) \\ &= M(xx'-yy'+xx''-yy'',xy'+x'y+xy''+x''y) \\ &= M(xx'+xx''-yy'-yy'',xy'+xy''+yx'+yx'') \end{aligned}$$

Donc $M(x,y)\mathrm{T}\left(M(x',y')+M(x'',y'')\right)=\left(M(x,y)\mathrm{T}M(x',y')\right)+\left(M(x,y)\mathrm{T}M(x'',y'')\right)$

D'où la loi T est distributive à gauche par rapport à $+$.

De même on montrera que la loi T est distributive à droite par rapport à $+$.

On conclut que la loi T est distributive par rapport à $+$ dans E.

b) On a montré les assertions suivantes dans ce qui précède :

- $(E,+)$ est un groupe abélien.
- (E,T) est un groupe.
- T est distributive par rapport à $+$.
- T est commutative dans E.

Donc $(E,+,\mathrm{T})$ est un corps commutatif.

Exercice 2

1) a) On a pour $z\neq i$: $h(z)=z \Leftrightarrow i\left(\frac{z-2i}{z-i}\right)=z$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \frac{z-2i}{z-i}=-iz \\ &\Leftrightarrow z-2i=-iz(z-i) \\ &\Leftrightarrow z-2i=-iz^2-z \\ &\Leftrightarrow iz^2+2z-2i=0 \\ &\Leftrightarrow z^2-2iz-2=0 \end{aligned}$$

b) Résolvons l'équation (E) : $z^2-2iz-2=0$

Le discriminant de (E) *est :* $(-2i)^2 - 4\times(-2) = 4$ *; d'où les solutions de* (E) *sont :*

$$z_1 = \frac{-(-2i)-\sqrt{4}}{2} = i-1 = b \quad et \quad z_1 = \frac{-(-2i)+\sqrt{4}}{2} = i+1 = a$$

2) a) On a : $\dfrac{h(z)-a}{h(z)-b} = \dfrac{i\left(\dfrac{z-2i}{z-i}\right)-a}{i\left(\dfrac{z-2i}{z-i}\right)-b}$

$$= \frac{\left(\dfrac{z-2i}{z-i}\right)+ia}{\left(\dfrac{z-2i}{z-i}\right)+ib}$$

$$= \frac{z-2i+ia(z-i)}{z-2i+ib(z-i)}$$

$$= \frac{z-2i+i(1+i)(z-i)}{z-2i+i(-1+i)(z-i)}$$

$$= \frac{z-2i+(-1+i)(z-i)}{z-2i-(1+i)(z-i)}$$

$$= \frac{z-2i-z+i+iz+1}{z-2i-z+i-iz-1}$$

$$= \frac{iz-i+1}{-iz-i-1}$$

$$= \frac{i\left(z-\dfrac{i+1}{i}\right)}{-i\left(z+\dfrac{i+1}{i}\right)}$$

$$= -\frac{(z-(1+i))}{(z+(1-i))}$$

$$= -\frac{(z-(1+i))}{(z-(-1+i))}$$

$$= -\left(\frac{z-a}{z-b}\right)$$

Donc $\dfrac{h(z)-a}{h(z)-b} = -\left(\dfrac{z-a}{z-b}\right)$

b) On a ; $\frac{h(z)-a}{h(z)-b} = -\left(\frac{z-a}{z-b}\right) \Rightarrow arg\left(\frac{h(z)-a}{h(z)-b}\right) \equiv arg\left(-\left(\frac{z-a}{z-b}\right)\right)[2\pi]$

$$\Rightarrow arg\left(\frac{h(z)-a}{h(z)-b}\right) \equiv arg\left(\frac{z-a}{z-b}\right) + arg(-1)[2\pi]$$

$$\Rightarrow arg\left(\frac{z_{M'}-z_A}{z_{M'}-z_B}\right) \equiv arg\left(\frac{z_M-z_A}{z_M-z_B}\right) + \pi[2\pi]$$

$$\Rightarrow \left(\overrightarrow{BM'};\overrightarrow{AM'}\right) \equiv \pi + \left(\overrightarrow{BM};\overrightarrow{AM}\right)[2\pi]$$

3) a) On a : A , B et M sont colinéaires ; donc : $\left(\overrightarrow{BM};\overrightarrow{AM}\right) \equiv 0[\pi]$

Alors $\left(\overrightarrow{BM};\overrightarrow{AM}\right) \equiv 0[2\pi]$ ou $\left(\overrightarrow{BM};\overrightarrow{AM}\right) \equiv \pi[2\pi]$

D'où $\left(\overrightarrow{BM'};\overrightarrow{AM'}\right) - \pi \equiv 0[2\pi]$ ou $\left(\overrightarrow{BM'};\overrightarrow{AM'}\right) - \pi \equiv \pi[2\pi]$

Donc $\left(\overrightarrow{BM'};\overrightarrow{AM'}\right) \equiv \pi[2\pi]$ ou $\left(\overrightarrow{BM'};\overrightarrow{AM'}\right) \equiv 2\pi[2\pi]$

D'où $\left(\overrightarrow{BM'};\overrightarrow{AM'}\right) \equiv \pi[2\pi]$ ou $\left(\overrightarrow{BM'};\overrightarrow{AM'}\right) \equiv 0[2\pi]$

Donc $\left(\overrightarrow{BM'};\overrightarrow{AM'}\right) \equiv 0[\pi]$

Ainsi A , B et M' sont colinéaires

Par suite A , B , M et M' sont colinéaires

b) On suppose que les points A , B et M ne sont pas colinéaires.

On a : $\frac{h(z)-a}{h(z)-b} = -\left(\frac{z-a}{z-b}\right) \Rightarrow \frac{a-h(z)}{b-h(z)} \times \frac{z-b}{z-a} = -1 \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \left(\frac{z_A-z_{M'}}{z_B-z_{M'}}\right) \times \left(\frac{z_B-z_M}{z_A-z_M}\right) \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow A;B;M$ et M' sont colinéaires ou $A;B;M$ et M' sont cocycliques

$\Rightarrow A;B;M$ et M' sont cocycliques car $A;B$ et M ne sont pas colinéaires

Exercice 3

1) a) L'univers de probabilité est $\Omega = \{P,F\}$

L'expérience consiste à répéter 10 fois le lancer ; obtenir Pile est représenté par une variable aléatoire X qui suit une loi de Bernouille de paramètre $p(P)=p(F)=\frac{1}{2}$

Donc X associant à chaque événement la fréquence d'apparition de pile dans une série de 10 lancées d'où les valeurs que peut prendre X sont $\frac{0}{10};\frac{1}{10};\frac{2}{10};\cdots;\frac{10}{10}$ càd

$$\Omega_2(X)=\left\{\frac{i}{10};0\le i\le 10\right\}$$

b) $p\left(X=\frac{1}{2}\right)=p\left(X=\frac{5}{10}\right)$

$$\begin{aligned}
&=C_{10}^{5}\left(\frac{1}{2}\right)^{5}\left(1-\frac{1}{2}\right)^{10-5}\\
&=\frac{10!}{5!5!}\left(\frac{1}{2}\right)^{5}\left(\frac{1}{2}\right)^{5}\\
&=\frac{10\times9\times8\times7\times6}{5\times4\times3\times2}\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\\
&=\frac{9\times4\times7}{2^{10}}\\
&=\frac{9\times7}{2^{8}}\\
&=\frac{63}{256}
\end{aligned}$$

2) On a : $p\left(X\ge\frac{9}{10}\right)=p\left(X=\frac{9}{10}\ \text{ou}\ X=\frac{10}{10}\right)$

$$\begin{aligned}
&=p\left(X=\frac{9}{10}\right)+p\left(X=\frac{10}{10}\right)\\
&=C_{10}^{9}\left(\frac{1}{2}\right)^{9}\left(1-\frac{1}{2}\right)^{10-9}+C_{10}^{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\left(1-\frac{1}{2}\right)^{10-10}\\
&=10\times\left(\frac{1}{2}\right)^{10}+\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\\
&=11\times\frac{1}{2^{10}}\\
&=\frac{11}{1024}
\end{aligned}$$

Donc $p\left(X\ge\frac{9}{10}\right)=\frac{11}{1024}$

Exercice 4

$$\begin{cases} f(x)=\sqrt{x}(\ln x)^2 & si\ x>0\\ f(0)=0 \end{cases}$$

1) a) On a : $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{x}(\ln x)^2$

$$= \lim_{x \to 0^+} \left(4 \times x^{\frac{1}{4}} \ln\left(x^{\frac{1}{4}}\right)\right)^2$$

On pose : $t = x^{\frac{1}{4}}$; donc $x \to 0^+$ alors $t \to 0^+$; et : $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (4t\ln t)^2 = 0$

(car $\lim\limits_{x \to 0^+} t\ln t = 0$) et $f(0) = 0$; d'où $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$

Ainsi f est continue à droite en 0.

b) On a : • $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x}(\ln x)^2 = +\infty$ (car $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$)

• $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x}(\ln x)^2}{x}$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln x)^2}{\sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\ln x}{x^{\frac{1}{4}}}\right)^2$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(4 \times \frac{\ln x^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{4}}}\right)^2$$

$$= \lim_{x \to +\infty} 4 \times \left(\frac{\ln x^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{4}}}\right)^2$$

On pose : $t = x^{\frac{1}{4}}$; donc $x \to +\infty$ alors $t \to +\infty$; et :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{t \to +\infty} 4 \times \left(\frac{\ln t}{t}\right)^2 = 0 \qquad \left(\text{car } \lim_{t \to +\infty} \frac{\ln t}{t} = 0\right)$$

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$; donc (C) admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$.

2) a) On a : $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sqrt{x}(\ln x)^2}{x}$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{(\ln x)^2}{\sqrt{x}} = +\infty \quad \left(car \lim_{x\to 0^+} (\ln x)^2 = +\infty \; et \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty\right)$$

Donc f n'est pas dérivable à droite en 0 ; et (C) admet une demi-tangent verticale dirigée vers le haut.

b) f est dérivable sur $]0,+\infty[$ comme produit et quotient de fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$; et pour tout $x \in]0,+\infty[$; on a :

$$f'(x) = \left(\sqrt{x}(\ln x)^2\right)'$$

$$= \frac{(\ln x)^2}{2\sqrt{x}} + \frac{2\ln x}{\sqrt{x}}$$

$$= \frac{(\ln x+4)\ln x}{2\sqrt{x}}$$

Donc $(\forall x \in]0,+\infty[)$; $f'(x) = \dfrac{(\ln x+4)\ln x}{2\sqrt{x}}$

c) $f'(x)$ est du même signe que $(\ln x+4)\ln x$; d'où le tableau de signe de $f'(x)$:

x	0		e^{-4}		1		$+\infty$
$\ln x$		$-$		$-$	0	$+$	
$\ln x+4$		$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc f est strictement décroissante sur $\left[e^{-4},1\right]$ et strictement croissante sur chacun des intervalles $\left]-\infty;e^{-4}\right]$ et $\left[e^{-4};+\infty\right[$.

On a : $f\left(\left[0,e^{-4}\right]\right) = \left[f(0),f\left(e^{-4}\right)\right] = \left[0,\left(\dfrac{4}{e}\right)^2\right]$ $\quad \left(f\left(e^{-4}\right) = \dfrac{16}{e^2} = \left(\dfrac{4}{e}\right)^2\right.$

Donc $\forall x \in \left[0,e^{-4}\right]$; $0 \le f(x) \le \left(\dfrac{4}{e}\right)^2$

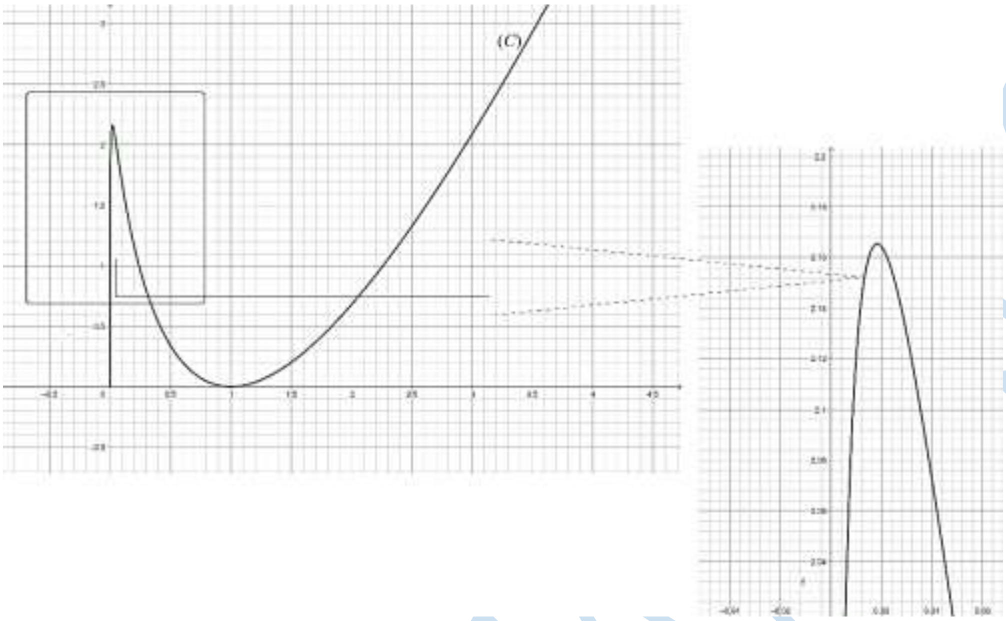
Et $f\left(\left[e^{-4},1\right]\right) = \left[f(1);f\left(e^{-4}\right)\right] = \left[0,\left(\dfrac{4}{e}\right)^2\right]$

Donc $\forall x \in \left[e^{-4},1\right]$; $0 \le f(x) \le \left(\dfrac{4}{e}\right)^2$

On conclut que : $\forall x \in [0,1]$; $0 \le f(x) \le \left(\dfrac{4}{e}\right)^2$

Par suite $\forall x \in [0,1]$; $0 \le \sqrt{x}(\ln x)^2 \le \left(\dfrac{4}{e}\right)^2$

c) Construction de (C)



3) Pour tout $x \ge 0$; $F(x) = \int_x^1 f(t)\,dt$

a) f *est continue sur* $[0,+\infty[$ *et* $1 \in [0,+\infty[$ *; alors elle admet une seule primitive*

telle que : $\begin{cases} \varphi(x) = \int_1^x f(t)\,dt \\ \varphi'(x) = f(x) \end{cases}$

Ainsi $F(x) = \int_x^1 f(t)\,dt = -\int_1^x f(t)\,dt = -\varphi(x)$

Donc $(\forall x \ge 0)$; $F(x) = -\varphi(x)$ *; comme* φ *est dérivable sur* $[0,+\infty[$ *; alors* F *est dérivable sur* $[0,+\infty[$ *; et* $F'(x) = -\varphi'(x) = -f(x)$

Par suite $(\forall x \in [0,+\infty[)$; $F'(x) = -\sqrt{x}(\ln x)^2$

b) On a : $(\forall x \in [0,+\infty[)$; $F'(x) = -\sqrt{x}(\ln x)^2 \le 0$

Donc F *est décroissante sur* $[0,+\infty[$

4) a) Calculons en utilisant une intégration par parties $\int_x^1 \sqrt{t}\ln t\,dt$

On pose : $\begin{cases} u(t) = \ln t \quad ; \quad u(t) = \dfrac{1}{t} \\ v'(t) = \sqrt{t} \quad ; \quad v(t) = \dfrac{2\sqrt{t^3}}{3} \end{cases}$

Donc $\int_x^1 \sqrt{t}\ln t\,dt = \frac{2}{3}\left[\sqrt{t^3}\ln t\right]_x^1 - \frac{2}{3}\int_x^1 \frac{\sqrt{t^3}}{t}\,dt$

$$= \frac{2}{3}\left(\left[\sqrt{t^3}\ln t\right]_x^1 - \int_x^1 \sqrt{t}\,dt\right)$$

$$= \frac{2}{3}\left(-\sqrt{x^3}\ln x - \left[\frac{2\sqrt{t^3}}{3}\right]_x^1\right)$$

$$= \frac{2}{3}\left(-\sqrt{x^3}\ln x - \frac{2}{3} + \frac{2\sqrt{x^3}}{3}\right)$$

$$= -\frac{2}{9}\left(3x\sqrt{x}\ln x + 2 - 2x\sqrt{x}\right)$$

$$= -\frac{2}{9}\left(x\sqrt{x}\left(3\ln x - 2\right) + 2\right)$$

Ainsi $(\forall x \in [0,+\infty[)$; $\int_x^1 \sqrt{t}\ln t\,dt = -\frac{2}{9}\left(x\sqrt{x}\left(3\ln x - 2\right) + 2\right)$

b) Soit $x > 0$; utilisant une intégration par parties pour calculer $F(x) = \int_x^1 f(t)\,dt$

On pose : $\begin{cases} u(t) = (\ln t)^2 \quad ; \quad u(t) = \frac{2\ln t}{t} \\ v'(t) = \sqrt{t} \quad ; \quad v(t) = \frac{2\sqrt{t^3}}{3} \end{cases}$

Alors $F(x) = \frac{2}{3}\left[(\ln t)^2\sqrt{t^3}\right]_x^1 - \frac{2}{3}\int_x^1 \frac{2\sqrt{t^3}\ln t}{t}\,dt$

$$= -\frac{2(\ln x)^2\sqrt{x^3}}{3} - \frac{4}{3}\int_x^1 \sqrt{t}\ln t\,dt$$

$$= -\frac{2(\ln x)^2\sqrt{x^3}}{3} + \frac{8}{27}\left(x\sqrt{x}\left(3\ln x - 2\right) + 2\right)$$

$$= -\frac{2(\ln x)^2 x\sqrt{x}}{3} + \frac{24x\sqrt{x}\ln x}{27} - \frac{16x\sqrt{x}}{27} + \frac{16}{27}$$

$$= -\frac{2}{3}x\sqrt{x}(\ln x)^2 + \frac{8}{9}x\sqrt{x}\ln x - \frac{16}{27}x\sqrt{x} + \frac{16}{27}$$

Donc $(\forall x > 0)$; $F(x) = -\frac{2}{3}x\sqrt{x}(\ln x)^2 + \frac{8}{9}x\sqrt{x}\ln x - \frac{16}{27}x\sqrt{x} + \frac{16}{27}$

c) Soit $\mathcal{A}$ l'aire de la partie du plan délimité par (C) et les droites d'équations $x=0$; $x=1$ et $y=0$.

Alors $\mathcal{A} = \int_0^1 |f(t)|\,dt$

$$= \int_0^1 f(t)\,dt \quad (\text{car } f(t) \geq 0)$$

$$= \lim_{x\to 0^+} F(x)$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \left(-\frac{2}{3}x\sqrt{x}(\ln x)^2 + \frac{8}{9}x\sqrt{x}\ln x - \frac{16}{27}x\sqrt{x} + \frac{16}{27} \right) = \frac{16}{27}$$

(car $= \lim_{x\to 0^+} x\sqrt{x}(\ln x)^2 = \lim_{x\to 0^+} x\sqrt{x}\ln x = 0$)

Donc $\mathcal{A} = \frac{16}{27}(2cm)^2 = \frac{64}{27}\ cm^2$