REVISION D'ARITHMETIQUES

(EXERCICES AVEC SLUTIONS DU BAC 2011-2019) 2éme Bac SM

Exercice1 : Normale 2011

Soit N *l'entier naturel dont l'écriture dans la base décimale est :* $N = \underbrace{111..........1}_{2010\ fois 1}$

0.25 1 - Montre que le nombre N *est divisible par 11*

0.75 2 - a) Vérifier que le nombre 2011 est premier et que : $10^{2010} - 1 = 9N$

0.5 b) Montrer que le nombre 2011 divise le nombre $9N$

0.5 c) En déduire que le nombre 2011 divise le nombre N .

0.5 3 - Montrer que le nombre N *est divisible par 22121.*

Exercice2 : Rattrapage 2011

Soit x *un nombre entier naturel tel que :* $10^x \equiv 2[19]$

0.25 1 - a) vérifier que : $10^{x+1} \equiv 1[19]$

0 .5 b) Montrer que : $10^{18} \equiv 1[19]$

2 - Soit d le plus grand diviseur commun des deux nombres 18 et $x+1$

0.75 a) Montrer que : $10^d \equiv 1[19]$

0.5 b) Montrer que : $d = 18$

0.5 c) En déduire que : $x \equiv 17[18]$

Exercice3 : Normale 2012

1) On considère dans $\mathbb{Z}^2$ *l'équation :* $(E): 143x - 195y = 52$

a) Déterminer le plus grand commun diviseur de 143 et 195, puis en déduire que l'équation (E) *admet des solutions dans* $\mathbb{Z}^2$.

b) Sachant que $(-1,-1)$ *est une solution particulière de l'équation* (E)*, résoudre dans* $\mathbb{Z}^2$ *l'équation* (E) *en précisant les étapes de la résolution.*

2) Soit n un entier naturel non nul premier avec 5

Montrer que pour tout k de IN on a : $n^{4k} \equiv 1\ [5]$

3) Soient x et y deux entiers naturels non nuls tel que $x \equiv y\ [4]$

a) Montrer que pour tout n de IN^* *, on a :* $n^x \equiv n^y\ [5]$

b) En déduire que pour tout n de IN^* *, on a :* $n^x \equiv n^y\ [10]$

4) Soit deux entiers naturels tels que $(x;y)$ *solution de l'équation* (E).

Montrer que pour tout n de IN^**, les deux nombres* n^x *et* n^y *ont le même chiffre des unités dans l'écriture à base décimal.*

Exercice4 : Rattrapage 2012

0.25 1) a- Vérifier que le nombre 503 est premier.

0.75 b- Montrer que : $7^{502} \equiv 1\ [503]$ *; en déduire que :* $7^{2008} \equiv 1\ [503]$

2) On considère dans $\mathbb{Z}^2$ *l'équation* (E): $49x - 6y = 1$

0.5 Sachant que $(1;8)$ *est une solution particulière de l'équation* (E)*; résoudre dans* $\mathbb{Z}^2$.

L'équation (E) en précisant les étapes de la résolution.

3) On pose : $N=1+7+7^2$ .... 7^{2007}

0.25 a- Montrer que le couple $(7^{2006};N)$ est solution de l'équation (E)

1 b- Montrer que $N\equiv 0\ [4]$ et $N\equiv 0\ [503]$

0.25 c- En déduire que le nombre N est divisible par 2012

Exercice5 : Normale 2013

L'objectif de l'exercice est de chercher les entiers naturels n strictement supérieurs à 1 et qui vérifient la propriété suivante : $(R): 3^n-2^n\equiv 0[n]$

1- On suppose que n vérifie la propriété (R) et soit p le plus petit diviseur premier positif de n .

0.75 a)Montrer que : $3^n-2^n\equiv 0[p]$, puis en déduire que $p\geq 5$.

0.5 b) Montrer que $3^{p-1}\equiv 1[p]$ et $2^{p-1}\equiv 1[p]$

0.5 c)Montrer qu'il existe un couple (a,b) de $\mathbb{Z}^2$ tel que : $an-b(p-1)=1$

0.5 d) Soient r et q le reste et le quotient de la division euclidienne de a par $(p-1)$

Montrer qu'il existe un entier naturel k tel que : $rn=1+k(p-1)$.

0.75 2- En déduire de tout ce qui précède qu'il n'existe pas d'entier naturel n strictement supérieur à 1 vérifiant (R)

Exercice6 : Normale 2014

Pour tout n de IN^* on pose : $a_n=\underbrace{333.......3}_{n\ fois}1$ (n fois le chiffre 3)

0.50 1- Vérifier que les deux nombres a_1 et a_2 sont premiers.

0.50 2- Montrer que pour tout n de IN^* : $3a_n+7=10^{n+1}$.

0.75 3 - Montrer que pour tout k de IN : $10^{30k+2}\equiv 7[31]$.

0.75 4 - Montrer que pour tout k de IN : $3a_{30k+1}\equiv 0[31]$ puis en déduire que : 31 divise a_{30k+1}.

0.50 5- Montrer que pour tout n de IN^* , si $n\equiv 1[30]$ alors l'équation $a_nx+31y=1$ n'admet pas de solutions dans $\mathbb{Z}^2$.

Exercice7 : Rattrapage 2014

Soit n un entier naturel non nul, on pose $b_n=2.10^n+1$ et $c_n=2.10^n-1$.

0,50 pt 1) Montrer que $b_n\wedge c_n=c_n\wedge 2$ puis en déduire que b_n et c_n sont premiers entre eux.

0,50 pt 2) Trouver un couple $(x_n;y_n)$ de $\mathbb{Z}^2$ vérifiant $b_n.x_n+c_n.y_n=1$.

Exercice8 : Normale 2015

Soit x un nombre entier relatif tel que : $x^{1439}\equiv 1436\ [2015]$

0.25 1- Sachant que: $1436\times 1051-2015\times 749=1$, montrer que 1436 et 2015 sont premiers entre eux.

2- Soit d un diviseur commun de x et de 2015.

0.5 a) Montrer que d divise 1436

0.5 b) En déduire que x et 2015 sont premiers entre eux.

0.75 3- a) En utilisant le théorème de FERMAT, montrer que : $x^{1440}\equiv 1[5]$, $x^{1440}\equiv 1[13]$ et $x^{1440}\equiv 1[31]$ (Remarquer que : $2015=5\times 13\times 31$)

0.5 b) Montrer que : $x^{1440}\equiv 1[65]$ et en déduire que : $x^{1440}\equiv 1[2015]$

0.5 4- Montrer que : $x \equiv 1051[2015]$

Exercice9 : Rattrapage 2015

0.5 1) a étant un entier, montrer que si a et 13 sont premiers entre eux alors $a^{2016} \equiv 1\ [13]$

2) On considère dans $\mathbb{Z}$ l'équation $(E):\ x^{2015} \equiv 2\ [13]$

Soit x une solution de l'équation (E)

0.50 a) Montrer que x et 13 sont premiers entre eux.

0.50 b) Montrer que : $x \equiv 7\ [13]$

0.50 3) Montrer que l'ensemble des solutions de l'équation (E) est $S=\{7+13k\ /\ k\in\mathbb{Z}\}$

Exercice10 : Normale 2016

Partie I :

Soit $(a;b)\in IN^*\times IN^*$ tel que le nombre premier 173 divise a^3+b^3

0,25 pt 1) Montrer que $a^{171}\equiv -b^{171}[173]$. (Remarquer que $171=3\times 57$)

0,25 pt 2) Montrer que : 173 divise a si et seulement si 173 divise b.

0,25 pt 3) On suppose que 173 divise a. Montrer que 173 divise $a+b$.

4) On suppose que 173 ne divise pas a

0,50 pt a) En utilisant le théorème de Fermat, montrer que $a^{172}\equiv b^{172}[173]$.

0,50 pt b) Montrer que : $a^{171}(a+b)\equiv 0[173]$.

0,50 pt c) En déduire que 173 divise $a+b$.

Partie II :

On considère dans $IN^*\times IN^*$ l'équation : $(E): x^3+y^3=173(xy+1)$.

Soit $(x;y)$ de $IN^*\times IN^*$ solution de l'équation (E), on pose $x+y=173k$ où $k\in IN^*$.

0,25 pt 1) Vérifier que : $k(x-y)^2+(k-1)xy=1$.

0,50 pt 2) Monter que : $k=1$, puis résoudre l'équation (E).

Exercice11 : Normale 2017

On admet que 2017 est un nombre premier, et que : $2016=2^5 3^2 7$

Et soit p un nombre premier supérieur ou égale à 5.

1) Soit $(x;y)$ un couple de $IN^*\times IN^*$ vérifiant : $px+y^{p-1}=2017$

0,25 pt a) Vérifier que : $p<2017$.

0,50 pt b) Montrer que : p ne divise pas y.

0,75 pt c) Montrer que : $y^{p-1}\equiv 1[p]$ puis en déduire que p divise 2016.

0,50 pt d) Montrer que : $p=7$.

1,00 pt 2) Déterminer, suivant les valeurs de p, les couples $(x;y)$ de $IN^*\times IN^*$ vérifiant :

$px\ +\ y^{p-1}=2017$

Exercice12 : Normale 2018

Soit p un nombre premier tel que : $p=3+4k$ avec $k\in IN^*$.

0,5 pt 1. Montrer que pour tout entier relatif x, si $x^2\equiv 1[p]$ alors $x^{p-5}\equiv 1[p]$.

2. Soit x un entier relatif vérifiant $x^{p-5} \equiv 1[p]$.

0,5 pt a) Montrer que x et p sont premiers entre eux.

0,5 pt b) Montrer que : $x^{p-1} \equiv 1[p]$.

0,5 pt c) Vérifier que : $2+(k-1)(p-1)=k(p-5)$.

0,5 pt d) En déduire que $x^2 \equiv 1[p]$.

0,5 pt 3. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation : $x^{62} \equiv 1[67]$.

Exercice13 : Normale 2019

On admet que 2969 (l'année amazighe actuelle) est un nombre premier.

Soient n et m deux entiers naturels vérifiant : $\boldsymbol{n}^8+\boldsymbol{m}^8 \equiv 0[2969]$

1- On suppose dans cette question que 2969 ne divise pas n

a) En utilisant le théorème de BEZOUT, montrer que : $(\exists \boldsymbol{u} \in \mathbb{Z}); \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{n} \equiv 1[2969]$

b) En déduire que : $(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{m})^8 \equiv -1[2969]$ et que $(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{m})^{2968} \equiv -1[2969]$

(On remarque que: $2968=8 \times 371$)

c) Montrer que 2969 ne divise pas $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{m}$

d) En déduire qu'on a aussi $(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{m})^{2968} \equiv 1[2969]$

2- a) En utilisant les résultats précédents, montrer que : 2969 divise n.

b) Montrer que $\boldsymbol{n}^8+\boldsymbol{m}^8=0[2969] \Leftrightarrow \boldsymbol{m} \equiv 0[2969]$ ***et*** $\boldsymbol{n} \equiv 0[2969]$.

SOLUTIONS

Examen 2014 Session de Rattrapage

$(\forall n \in \mathbb{N})\ c_n = 2.10^n - 1$ *et* $b_n = 2.10^n + 1$.

1) *On a :* $b_n = c_n \times 1 + 2$ *et* $0 < 2 < c_n$ (*car :* $n \geq 1$)

Alors, d'après l'Algorithme d'Euclide : $b_n \wedge c_n = c_n \wedge 2$

Et comme c_n *est impair ; alors :* $c_n \wedge 2 = 1$

Donc : $b_n \wedge c_n = 1$

On en déduit que b_n *et* c_n *sont premiers entre eux.*

On conclut : $\boxed{c_n \wedge 2 = 1}$ *et* $\boxed{b_n \wedge c_n = 1}$

2) Comme $b_n \wedge c_n = 1$ *; alors d'après le théorème de Bézout :*

$\exists (x_n ; y_n) \in \mathbb{Z}^2\ /\ b_n x_n + c_n y_n = 1$.

D'après l'algorithme d'Euclide, on a :

$$\begin{cases} b_n = c_n + 2 \\ c_n = 2(10^n - 1) + 1 \end{cases} \Rightarrow 1 = c_n - 2(10^n - 1)$$

$$\Rightarrow 1 = c_n - (b_n - c_n)(10^n - 1)$$

$$\Rightarrow 1 = c_n.10^n + (1 - 10^n).b_n = b_n.(1 - 10^n) + c_n.10^n$$

On déduit que : $\boxed{x_n = 1 - 10^n}$ *et* $\boxed{y_n = 10^n}$.

Examen 2015 Session Normale

1) on a : $1436 \times 1051 - 2015 \times 749 = 1$

Donc $\exists u = 1051 \in \mathbb{Z}$ *et* $\exists v = -749 \in \mathbb{Z}$ *tel que :* $u \times 1436 + v \times 2015 = 1$

D'où D'après le théorème de Bézout : $\boxed{1436 \wedge 2015 = 1}$.

Alors : 1436 et 2015 sont premiers entre eux.

2) Soit d un diviseur commun de x et de 2015

a) Montrons que : d divise 1436

On a : x est un entier relatif vérifiant $x^{1439} \equiv 1436 [2015]$

Donc $(\exists k \in \mathbb{Z})\ /\ x^{1439} - 1436 = 2015k$

D'où : $(\exists k \in \mathbb{Z})\ /\ x^{1439} - 2015k = 1436$

d un diviseur commun des nombres x et 2015.

Alors d divise x et d divise 2015

Donc d divise x^{1439} *et d divise* $2015k$

D'où d divise $(x^{1439} - 2015k)$

Par suite $\boxed{d \text{ divise } 1436.}$

b) posons $d = x \wedge 2015$ *donc d divise x et d divise* 2015

Et on a : d divise 1436 *(d'après la question précédente).*

Donc d divise (1436×1051) *et d divise* (2015×749).

Par suite d divise $(1436 \times 1051 - 2015 \times 749)$ *, d'où d divise 1*

Et comme $d > 0$ alors : $d = 1$.

On conclut que : $\boxed{x \wedge 2015 = 1}$.

3) a) on a : $2015 = 5 \times 13 \times 31$

Donc $x \wedge (5 \times 13 \times 31) = 1$ (car $x \wedge 2015 = 1$), alors $\begin{cases} x \wedge 5 = 1 \\ x \wedge 13 = 1 \\ x \wedge 31 = 1 \end{cases}$

Et comme 5,13 et31 sont des nombres premiers positifs, alors d'après Fermat on déduit que

$$\begin{cases} x^4 \equiv 1[5] \\ x^{12} \equiv 1[13] \\ x^{30} \equiv 1[31] \end{cases} \text{ Donc } \begin{cases} (x^4)^{360} \equiv 1[5] \\ (x^{12})^{120} \equiv 1[13] \\ (x^{30})^{46} \equiv 1[31] \end{cases} \text{ d'où : } \begin{cases} x^{1440} \equiv 1[5] \\ x^{1440} \equiv 1[13] \\ x^{1440} \equiv 1[31] \end{cases}$$

b) Montrons que : $x^{1440} \equiv 1[65]$ et déduisons que $x^{1404} \equiv 1[2015]$

■ On a : $\begin{cases} x^{1440} \equiv 1[5] \\ x^{1440} \equiv 1[13] \end{cases}$, et comme $13 \wedge 5 = 1$ alors

$x^{1440} \equiv 1[13 \times 5]$ d'où $x^{1440} \equiv 1[65]$

■ On a : $\begin{cases} x^{1440} \equiv 1[65] \\ x^{1440} \equiv 1[31] \end{cases}$, et comme 31 est premier avec 65 (car 65=5x13 et 31 est premier)

Alors $x^{1440} \equiv 1[31 \times 65]$, soit $x^{1440} \equiv 1[2015]$

4) Montrons que : $\boxed{x \equiv 1051[2015]}$

On a : $x^{1439} \equiv 1436[2015]$ d'où $x^{1440} \equiv 1436 \times x[2015]$

Et on a : $x^{1440} \equiv 1[2015]$, donc : $1436 \times x \equiv 1[2015]$

Donc : $(\exists u \in \mathbb{Z})/1436 \times x - u \times 2015 = 1$ et on a : $1436 \times 1051 - 2015 \times 749 = 1$.

D'où : $1436 \times (x - 1051) = 2015 \times (u - 749)$ donc 2015 divise $1436(x - 1051)$

Et Comme : $2015 \wedge 1436 = 1$ (d'après (1)), alors d'après le théorème de Gauss : 2015 divise $(x - 1051)$

Par suite : $\boxed{x \equiv 1051[2015]}$

Examen 2015 Rattrapage 2015

1) a étant un entier, montrons que si a et 13 sont premiers entre eux alors $a^{2016} \equiv 1\ [13]$

On a 13 est un nombre premier positif et a et 13 sont premiers entre eux

Et d'après le théorème de Fermat : $a^{12} \equiv 1\ [13]$

Donc $(a^{12})^{168} \equiv 1\ [13]$ soit $a^{2016} \equiv 1\ [13]$

2) On considère dans $\mathbb{Z}$ l'équation (E) : $x^{2015} \equiv 2\ [13]$

Et soit x une solution de l'équation (E)

a) Montrons que x et 13 sont premiers entre eux.

On a 13 est un nombre premier, donc $x \wedge 13 = 1$ ou $x \wedge 13 = 13$

Si $x \wedge 13 = 13$ alors 13 divise x donc $x \equiv 0\ [13]$

D'où $x^{2015} \equiv 0\ [13]$

Or $x^{2015} \equiv 2\ [13]$ donc $2 \equiv 0\ [13]$ ce qui est absurde.

Donc $x \wedge 13 = 1$

Alors, les nombres x et 13 sont premiers entre eux.

b) Montrons que : $x \equiv 7\ [13]$

On a x et 13 sont premiers entre eux, et d'après la question (1) : $x^{2016} \equiv 1\ [13]$

Et on a : $x^{2015} \equiv 2\ [13]$, donc $x^{2016} \equiv 2x\ [13]$

On déduit que $2x \equiv 1\ [13]$, d'où $2x \equiv 14\ [13]$ ($\text{car } 14 \equiv 1\ [13]$)

Et comme 2 et 13 sont premiers entre eux, alors $x \equiv 7\ [13]$

3) Montrons que l'ensemble des solutions de l'équation (E) est $S = \{7 + 13k \,/\, k \in \mathbb{Z}\}$

D'après ce qui précède, on a :

x une solution de l'équation $(E) \Rightarrow x \equiv 7\ [13]$

Réciproquement, si $x \equiv 7\ [13]$ alors $x^{2015} \equiv 7^{2015}\ [13]$

Et comme 7 et 13 sont premiers entre eux, alors d'après (1) : $7^{2016} \equiv 1\ [13]$

Et on a : $14 \equiv 1 [13]$, donc $7^{2016} \equiv 14\ [13]$ d'où $7 \times 7^{2015} \equiv 7 \times 2\ [13]$

7 et 13 sont premiers entre eux, alors $7^{2015} \equiv 2\ [13]$

Donc 7 est solution de l'équation (E)

D'où : $x \equiv 7\ [13] \Rightarrow x$ une solution de l'équation (E)

Par conséquent l'ensemble des solutions de l'équation (E) est $S = \{7 + 13k \,/\, k \in \mathbb{Z}\}$

Examen 2016 Session Normale

Partie I

Soit $(a;b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ et le nombre premier 173 divise $(a^3 + b^3)$.

1- Montrons que : $a^{171} \equiv -b^{171} [173]$

On a : $173 | a^3 + b^3 \iff a^3 + b^3 \equiv 0\ [173]$

$$\iff a^3 \equiv -b^3\ [173]$$

$$\iff \left(a^3\right)^{57} \equiv \left(-b^3\right)^{57}\ [173]$$

Par suite : $\boxed{a^{171} \equiv -b^{171}\ [173]}$.

2. Montrons que : $173 | a \iff 173 | b$

On a : ∎) $173 | a \Rightarrow 173 | a^3$, et comme $173 | a^3 + b^3$ alors : $173 | \left(a^3 + b^3\right) - a^3$

D'où : $173 | b^3$

Et comme 173 est premier ; alors $173 | b$

∎) De même si $173 | b$ on montre que : $173 | a$

Conclusion : $173 | a \iff 173 | b$.

3. On suppose que 173 divise a. Montrons que 173 divise $a + b$.

On a : $173 | a$, alors $173 | b$ (d'après (2)). Donc : $173 | a + b$

Donc, si $173 | a$ alors $\boxed{173 | a + b}$.

4- On suppose que 173 ne divise pas a.

a) Montrons que : $a^{172} \equiv b^{172} [173]$

On a : 173 est premier positif et ne divise pas a, donc d'après la question (2) : 173 ne divise pas b

Et d'après le théorème de Fermat : $a^{172} \equiv 1\ [173]$ et $b^{172} \equiv 1\ [173]$

Par suite : $\boxed{a^{172} \equiv b^{172}\ [173]}$

b) Montrons que : $a^{171}(a + b) \equiv 0 [173]$.

On a : $a^{171} \equiv -b^{171}\ [173]$ et $a^{172} \equiv b^{172}\ [173]$, donc $a^{172} \equiv -b\times(-b^{171})\ [173]$

On en déduit que : $a^{172} \equiv -b\times a^{171}\ [173]$, donc $a^{172}+b\times a^{171} \equiv 0\ [173]$

D'où : $a^{171}\times(a+b)\equiv 0\ [173]$.

c) Déduisons que 173 divise $a+b$.

On a : 173 est premier et ne divise pas a, donc $173\wedge a=1$ alors : $173\wedge a^{171}=1$

On a : $a^{171}\times(a+b)\equiv 0\ [173]$ (d'après b), donc 173 divise $a^{171}\times(a+b)$

Et d'après le théorème de Gauss 173 divise$(a+b)$.

Partie II : On considère dans $IN^*\times IN^*$ l'équation : $(E): x^3+y^3=173(xy+1)$.

Soit $(x;y)$ de $IN^*\times IN^*$ solution de l'équation(E), on pose $x+y=173k$ où $k\in IN^*$.

1) Vérifions que : $k(x-y)^2+(k-1)xy=1$.

Pour tout x ; y et k de $\mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{cases} x+y=173k \\ x^3+y^3=173(xy+1)\end{cases} \Rightarrow (x^2-xy+y^2)173k=173(xy+1)$$

$$\Rightarrow \left((x-y)^2+xy\right)k = xy+1$$

$$\Rightarrow k(x-y)^2+xyk-xy=1$$

$$\Rightarrow k(x-y)^2+(k-1)xy=1$$

Donc : $\boxed{k(x-y)^2+(k-1)xy=1}$

2. ■ Montons que : $k=1$

On a : x ; y et k appartiennent à $\mathbb{N}^*$ alors : $k\geq 1$ et $xy\geq 1$

Donc : $k(x-y)^2\in\mathbb{N}$ et $(k-1)xy\in\mathbb{N}$ et $k(x-y)^2+(k-1)xy=1$

Alors $\begin{cases} k(x-y)^2=1 \\ (k-1)xy=0\end{cases}$ ou $\begin{cases} k(x-y)^2=0 \\ (k-1)xy=1\end{cases}$

Donc $\begin{cases} k=1 \text{ et } x-y=1 \text{ ou } x-y=-1 \\ k-1=0\end{cases}$ ou $\begin{cases} x-y=0 \\ k=2 \text{ et } x=1 \text{ et } y=1\end{cases}$

D'où $\begin{cases} (x-y)^2=1 \\ k=1\end{cases}$ (1) ou $\begin{cases} x=y=1 \\ k=2\end{cases}$ (2)

Le deuxième système est impossible, car si $x=y=1$ alors l'équation(E)devient : $2=173\times 2$ ce qui est impossible.

Donc, on en déduit que : $k=1$.

■ On résout l'équation(E).

$$(x;y) \text{ solution de } (E) \Rightarrow \begin{cases} (x-y)^2=1 \\ x+y=173\end{cases} \quad (\text{car } k=1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-y=1 \\ x+y=173\end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x-y=-1 \\ x+y=173\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = 174 \\ 2y = 172 \end{cases} \quad ou \quad \begin{cases} 2x = 172 \\ 2y = 174 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 87 \\ y = 86 \end{cases} \quad ou \quad \begin{cases} x = 86 \\ y = 87 \end{cases}$$

***Réciproquement** on a :*

$$87^3 + 86^3 = (86+87)(87^2 - 87\times 86 + 86^2) = 173(87+86^2) = 173(1+87\times 86)$$

Donc l'ensemble de solutions de l'équation (E) *est :* $S = \{(87;86);(86;87)\}$.

<u>Examen 2017 Session Normale</u>

Soit p un nombre premier tel que : $p \geq 5$.

1) Soit $(x;y)$ *un couple de* $IN^* \times IN^*$ *vérifiant :* $px + y^{p-1} = 2017$

a) Vérifions que : $p < 2017$.

Supposons que : $p \geq 2017$.

On a $(x;y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ *; donc* $x \geq 1$ *et* $y \geq 1$ *d'où :* $px \geq 2017$ *et* $y^{p-1} \geq 1$

Donc $px + y^{p-1} \geq 2018$ *d'où :* $2017 \geq 2018$ *ce qui est absurde.*

Par suite : $p < 2017$.

b) Montrons que : p ne divise pas y.

Supposons que $p | y$ *alors :* $p | y^{p-1}$ *donc :* $y^{p-1} = kp \quad (k \in \mathbb{N})$

et on a : $px + y^{p-1} = 2017$ *d'où :* $px + kp = 2017$ *par suite :* $p | 2017$

Et comme p et 2017 sont deux nombres premiers positifs , alors p=2017
ce qui contredit le fait que $p < 2017$

Donc p ne divise pas y.

c)Montrons que : $y^{p-1} \equiv 1[p]$ *puis déduisons que p divise 2016.*

■) On a p est un nombre premier positif et p ne devise pas y.

Donc d'après le théorème de Fermat : $y^{p-1} \equiv 1\ [P]$

■) On a : $px \equiv 0[p]$ *et* $y^{p-1} \equiv 1\ [P]$*; donc :* $px + y^{p-1} \equiv 1\ [p]$

D'où : $2017 \equiv 1[p]$

Par suite : $2016 \equiv 0[p]$. *Alors p divise 2016.*

d) Montrer que : $p = 7$.

On a $2016 = 2^5 3^2 7$ *et p est un diviseur premier positif de 2016*
Donc p=2 ou p=3 ou p=7
Et comme $p \geq 5$, *alors p=7*

2) Déterminer, suivant les valeurs de p, les couples $(x;y)$ *de* $IN^* \times IN^*$ *vérifiant l'équation :*

$px + y^{p-1} = 2017$ *(E)*

■) d'après la question (1) : $(x;y)$ *est solution de l'équation (E)* $\Rightarrow$ *p=7*

Par contraposée, si $p \neq 7$ *alors l'équation (E) n'admet pas de solution.*

■) si $p = 7$*; alors l'équation (E) devient :* $7x + y^6 = 2017$ *d'où* $y^6 = 2017 - 7x$

Comme $x \geq 1$ *alors* $y^6 \leq 2010 < 2016$ *donc* $y^6 < 2^5 3^2 7 < 2^6 \times 64$

D'où : $y < 4$ *et* $(y \in \mathbb{N}^*)$ *par suite :* $y \in \{1;2;3\}$.

- ***Si*** $y = 3$ *l'équation devient :* $7x + 3^6 = 2017$ *donc :* $7x = 1288$ *d'où :* $x = 184$
- ***Si*** $y = 2$ *l'équation devient :* $7x + 2^6 = 2017$ *donc :* $7x = 1953$ *d'où:* $x = 279$
- ***Si*** $y = 1$ *l'équation devient :* $7x + 1^6 = 2017$ *donc* $7x = 2016$ *alors :* $x = 288$

Par suite : $S=\{(184;3);(279;2);(288;1)\}$.

Examen 2018 Session Normale

Soit p un nombre premier tel que : $p=3+4k$ *avec* $k\in IN^*$.

1) *Montrons que pour tout entier relatif x, si* $x^2\equiv 1[p]$ *alors* $x^{p-5}\equiv 1[p]$

On a : $x^2\equiv 1\ [p]\Rightarrow \left(x^2\right)^{2k-1}\equiv 1^{2k-1}\ [p]\qquad \left(car\, 2k-1\in \mathbb{N}^*\right)$

$$\Rightarrow x^{4k-2}\equiv 1\ [p]$$

$$\Rightarrow x^{(4k+3)-5}\equiv 1\ [p]$$

$$\Rightarrow x^{p-5}\equiv 1\ [p]$$

2) Soit x un entier relatif vérifiant : $x^{p-5}\equiv 1[p]$.

a) Montrons que x et p sont premier entre eux.

On a : $x^{p-5}\equiv 1\ [p]\Rightarrow p|\left(x^{p-5}-1\right)$

$$\Rightarrow x^{p-5}-1=kp\quad ;\left(k\in\mathbb{N}^*\right)$$

$$\Rightarrow x^{p-5}-kp=1\quad ;\left(k\in\mathbb{N}^*\right)$$

$$\Rightarrow x\left(x^{p-6}\right)+p(-k)=1$$

$$\Rightarrow \left(\exists(u;v)\in\mathbb{Z}^2\right)/\,u.x+v.p=1$$

Avec $\left|\begin{array}{l} u=x^{p-6}\in\mathbb{Z} \\ v=-k\in\mathbb{Z} \\ p\geq 7\end{array}\right.$ *; d'après le théorème de Bézout* $\boxed{x\wedge p=1}$.

D'où x et p sont premiers entre eux.

<u>2</u>

2ème méthode :

On a p est un nombre premier, donc $x\wedge p=1$ *ou* $x\wedge p=p$

Si $x\wedge p=p$ *,alors p divise x donc* $x\equiv 0[p]$ *par suite* $x^{p-5}\equiv 0[p]$

Et comme $x^{p-5}\equiv 1[p]$ *, alors* $1\equiv 0[p]$ *donc p=1 ce qui est absurde. (car p est premier)*

Donc $x\wedge p=1$ *, d'où x et p sont premier entre eux.*

b) Montrons que : $x^{p-1}\equiv 1[p]$

(D'après la question 2-a)), on a : p est premier positif et $x\wedge p=1$

Et d'après le théorème de Fermat : $x^{p-1}\equiv 1[p]$

c) Vérifions que $2+(k-1)(p-1)=k(p-5)$

On a : $2+(k-1)(p-1)=2+(k-1)(p-5+4)$

$$=2+4k-4+(k-1)(p-5)$$

$$=4k-2+(k-1)(p-5)$$

$$=4k+3-5+(k-1)(p-5)$$

$$=(p-5)+(k-1)(p-5)$$

$$=k(p-5)$$

d) Déduisons que $x^2\equiv 1[p]$.

On a : **■)** $x^{p-5}\equiv 1\ [p]\Rightarrow \left(x^{p-5}\right)^k\equiv 1\ [p]\qquad ;\left(k\in\mathbb{N}^*\right)$

$$\Rightarrow x^{k(p-5)} \equiv 1\ [p] \qquad ;(k \in \mathbb{N}^*)$$

$$\Rightarrow x^{2+(k-1)(p-1)} \equiv 1\ [p] \qquad ;(k \in \mathbb{N}^*)$$

$$\Rightarrow x^{2}\, x^{(k-1)(p-1)} \equiv 1\ [p] \qquad ;(k \in \mathbb{N}^*) \qquad (1)$$

■) $x^{p-1} \equiv 1\ [p]$ *(D'après la question 2- b)).*

$$\left(x^{(p-1)}\right)^{(k-1)} \equiv 1\ [p]$$

D'où : $x^2.x^{(k-1)(p-1)} \equiv x^2\ [p] \qquad (2)$

De (1) *et* (2) *on conclut que :* $\boxed{x^2 \equiv 1\ [p]}$

3) Résolvons l'équation : $x^{62} \equiv 1\ [67]$

D'après les résultats de (1) et (2), on en déduit que : $\left.\begin{array}{l} x^{p-1} \equiv 1\ [p] \\ p = 4k+3; k \in \mathbb{N}^* \end{array}\right\} \Leftrightarrow x^2 \equiv 1\ [p]$

Donc : $x^{62} \equiv 1\ [67] \Leftrightarrow x^{67-5} \equiv 1\ [67]$

$$\Leftrightarrow x^2 \equiv 1\ [67] \quad (\textit{car}\ \ 67 \text{ est premier et } 67 = 4\times 16+3)$$

$$\Leftrightarrow 67 \mid (x^2-1)$$

$$\Leftrightarrow 67 \mid (x-1)(x+1)$$

Comme 67 est un nombre premier, alors : $67 \mid (x-1)(x+1) \Leftrightarrow 67 \mid x-1$ *ou* $67 \mid x+1$

Donc : $x^{62} \equiv 1\ [67] \Leftrightarrow x-1 = 67k\ ;\ k \in \mathbb{Z}$ *ou* $x+1 = 67k'\ ;\ k' \in \mathbb{Z}$.

Alors : $S = \{67k-1 / k \in \mathbb{Z}\} \cup \{67k+1 / k \in \mathbb{Z}\}$

Examen 2019 : Session Normale

1) a- On a : 2969 *est premier et* $2969 \nmid n$ *donc :* $2969 \wedge n = 1$

Et d'après le théorème de Bézout : $\exists (u;v) \in \mathbb{Z}^2 \ /\ n\times u + 2969\times v = 1$ *d'où :*

$\exists u \in \mathbb{Z} / n\times u \equiv 1[2969]$

b- On a : $n^8 + m^8 \equiv 0[2969]$

donc $u^8\times n^8 + u^8\times m^8 \equiv 0[2969]$ *et* $n\times u \equiv 1[2969]$

d'où $u^8\times n^8 + u^8\times m^8 \equiv 0[2969]$ *et* $(n\times u)^8 \equiv 1[2969]$

donc $(u\times m)^8 \equiv -(n\times u)^8\ [2969]$

alors $(u\times m)^8 \equiv -1[2969]$

d'où $\left[(u\times m)^8\right]^{371} \equiv (-1)^{371}[2969]$

donc $(u\times m)^{2968} \equiv -1[2969]$

c- supposons que $2969 / u\times m$ *alors* $u\times m \equiv 0[2969]$

d'où $(u\times m)^{2968} \equiv 0[2969]$ *et par suite* $-1 \equiv 0[2969]$

ce qui est absurde donc $2969 \nmid u\times m$.

d- On a : 2969 *est premier positif et* $2969 \nmid u\times m$ *alors d'après le théorème de Fermat :*

$(u\times m)^{2968} \equiv 1[2969]$.

2) a- Supposons que $2969 \nmid n$ *, et d'après ce qui précède :*

$(u\times m)^{2968} \equiv 1[2969]$ *et* $(u\times m)^{2968} \equiv -1[2969]$

Donc $1 \equiv -1[2969]$ *d'où* $2969/2$ *ce qui est absurde.*

Alors $2969 \backslash n$

b- Supposons que $n^8 + m^8 \equiv 0[2969]$ *et d'après ce qui précède* $2969 \backslash n$ *donc* $n \equiv 0[2969]$

Alors : $n^8 \equiv 0[2969]$ *d'où :* $m^8 \equiv 0[2969]$.

Donc : $2969 \backslash m^8$.

Et comme 2969 *est premier, alors :* $2969 \backslash m$ *; d'où :* $n^8 + m^8 \equiv 0[2969]$

$$\Rightarrow n \equiv 0[2969] \text{ et } m \equiv 0[2969]$$

Réciproquement, supposons que :

$n \equiv 0[2969]$ *et* $m \equiv 0[2969]$ *; alors :* $n^8 \equiv 0[2969]$ *et* $m^8 \equiv 0[2969]$ *d'où :* $n^8 + m^8 \equiv 0[2969]$

Donc : $n^8 + m^8 \equiv 0[2969] \Leftrightarrow \begin{cases} n \equiv 0[2969] \\ m \equiv 0[2969] \end{cases}$.