

Exercice 1:

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \text{Arctan}\left(\frac{2x}{|x^2 - 1|}\right)$

1. Déterminer D_f le domaine de définition de f , puis étudier la parité de f .
2. Montrer que f est prolongeable par continuité en 1 et en -1. (On note g ce prolongement)
3. Montrer que : $\blacktriangleright (\forall x \in [0;1[) ; f(x) = 2\text{Arctan}(x) ;$
 $\blacktriangleright \forall x \in]1;+\infty[; f(x) = \pi - 2\text{Arctan}(x)$
4. Étudier la dérivabilité de g en 1, puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.
5. Étudier la monotonie de g sur $[0;+\infty[$; puis dresser le tableau de variations de g .
6. Soit h la restriction de g sur l'intervalle $[1;+\infty[$
 - a) Montrer que h admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer
 - b) Déterminer $h^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.
 - c) Représenter (C_g) et $(C_{h^{-1}})$.

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par :
$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(x) = \frac{\text{Arctan}(x)}{x} \quad ; \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $[0;+\infty[$.
2. a) Soit $x \in [0;+\infty[$
Montrer que : $\forall t \in [0;x] ; \frac{1}{1+x^2} \leq \frac{1}{1+t^2} \leq 1$
b) Montrer que : $(\forall x \in [0;+\infty[) ; \frac{x}{1+x^2} \leq \text{Arctan}(x) \leq 1$
c) Montrer que f est dérivable à droite en 0.
- 3) a) Sachant que f est dérivable sur $]0;+\infty[$; calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]0;+\infty[$
b) Etudier les variations de f sur $[0;+\infty[$
c) Représenter (C_f) .

Exercice 3

I- Soit g la fonction définie sur l'intervalle $] -\infty;0[$ par : $g(x) = \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{x}{x^2 + 1}$

- 1) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$
- 2) a) Calculer $g'(x)$ pour tout $x \in] -\infty;0[$, puis dresser le tableau de variations de g .
b) Déterminer le signe de $g(x)$.

II. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = (\sqrt[3]{x})^2 + \sqrt[3]{x} - x & ; \text{si } x \geq 0 \\ f(x) = x \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) & ; \text{si } x < 0 \end{cases}$$

1. Etudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.

2. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x}$; puis interpréter graphiquement les résultats obtenus.

3. Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

4. Etudier les branches infinies de (C_f) .

5. a) Montrer que $f'(x) = g(x)$ sur l'intervalle $]-\infty; 0[$

b) Calculer $f'(x)$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$

c) Dresser le tableau de variations de f .

6. a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]1; +\infty[$.

b) Montrer que : $\alpha^3 - 4\alpha^2 - \alpha = 0$, puis en déduire la valeur exacte de α .

7. Représenter (C_f)

8. Montrer que si a et b deux réels tel que : $0 < a < \alpha < b$, alors : $\frac{a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{1}{3}}}{b^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{1}{3}}} > \frac{a}{b}$