EXERCICE 1:

On considère la suite (u_n) définie par son premier terme $u_0 = 3$ et, pour tout enter naturel n, par $u_{n+1} = 2u_n + 6$.

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_n = 9\times 2^n - 6$

2. Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$, u_n est divisible par 6.

On définit la suite d'entiers (v_n) par, pour tout entier naturel $n \geq 1, v_n = \dfrac{u_n}{6}$

3. On considère l'affirmation : « pour tout entier naturel n non nul, v_n est un nombre premier »

Indiquer si cette affirmation est vraie ou fausse en justifiant la réponse

4. a) Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$ $v_{n+1} - 2v_n = 1$

b) En déduire que, pour tout entier $n \geq 1$, v_n et v_{n+1} sont premiers entre eux

c) En déduire, pour tout entier $n \geq 1$, le PGCD de u_n et u_{n+1}

5. a) Vérifier que : $2^4 \equiv 1[5]$.

b) En déduire que si n est de la forme $4k+2$ avec k entier naturel, alors u_n est divisible par 5.

c) Le nombre u_n est-il divisible par 5 pour les autres valeurs de l'entier naturel n? Justifier

CORRECTION :

1) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel $n, u_n = 9\times 2^n - 6$.

•$9\times 2^0 - 6 = 9 - 6 = 3 = u_0$. Donc, l'égalité est vraie quand n = 0.

• Soit $n > 0$. Supposons que $u_n = 9\times 2^n - 6$. Alors $u_{n+1} = 2u_n + 6 = 2\left(9\times 2^n - 6\right) + 6$

$= 2\times 9\times 2^n - 12 + 6$ *(par hypothèse de récurrence)* .

$= 9\times 2^{n+1} - 6$

On a montré par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n = 9\times 2^n - 6$.

2) Soit $n \geq 0$. $u_n = 9\times 2^n - 6$

$= 3\times 3\times 2\times 2^{n-1} - 6$

$= 6\left(3\times 2^{n-1} - 1\right)$.

De plus, $3\times 2^{n-1} - 1$ est un entier relatif car n est supérieur ou égal à 1. Ceci montre que, pour $n > 1$, u_n est un entier divisible par 6.

3) Pour $n \geq 0$, on a : $v_n = 3\times 2^{n-1} - 1$. En particulier, $v_6 = 3\times 2^5 - 1$

$= 3\times 32 - 1$

$= 95$

$= 5\times 19$

v_6 n'est pas un nombre premier et donc il existe au moins un entier naturel non nul n tel que v_n ne soit pas premier. L'affirmation de l'énoncé est fausse.

4) a) Soit $n \geq 0$. $v_{n+1} - 2v_n = \dfrac{1}{6}\left(u_{n+1} - 2un\right)$

$$=\frac{1}{6}\left(\cancel{2u_n}+6-\cancel{2u_n}\right).$$
$$=1$$

b) Soit $n\geq 0$ $.1\times v_{n+1}+(-2)v_n=1$ *. Donc, il existe deux entiers relatifs a et b tels que* $a\times v_{n+1}+b\times v_n=1$*.*
D'après le théorème de Bézout, v_n *et* v_{n+1} *sont premiers entre eux.*

c) Soit $n\geq 0$ *.* $pgcd(u_n,u_{n+1})=pgcd(6v_n,6v_{n+1})$

$$=6\ pgcd(v_n,v_{n+1})=6$$

Donc, pour tout entier naturel non nul n, $pgcd(u_n,u_{n+1})=6$

5. a) $2^4=16=1+3\times 5$ *donc :* $2^4\equiv 1\ [5]$

b) Soient k un entier naturel puis n = 4k + 2. $2^n=2^{4k+2}=\left(2^4\right)^k\times 2^2$ *et donc* $2^n\equiv(1)^k\times 2^2\ [5]$ *ou encore* $2^n\equiv 4\ [5]$ *. On en déduit que* $u_n\equiv 9\times 4-6\ [5]$ *ou encore* $u_n\equiv 30\ [5]$ *ou enfin* $u_n\equiv 0\ [5]$*.Ceci montre que* u_n *est un multiple de 5.*

c) Soit n un entier naturel. n est soit de la forme 4k, k ∈N, soit de la forme 4k + 1, k ∈N, soit de la forme 4k + 2, k ∈N, soit de la forme 4k + 3, k ∈N,

• *Soient k un entier naturel puis n = 4k. Alors,* $2^n=\left(2^4\right)^k\equiv 1\ [5]$ *puis* $u_n\equiv 9\times 1-6\ [5]$ *ou encore* $u_n\equiv 3\ [5]$*. Mais alors* $u_n\not\equiv 0\ [5]$*. Dans ce cas,* u_n *n'est pas divisible par 5.*

• *Soient k un entier naturel puis n = 4k + 1. Alors,* $2^n=\left(2^4\right)^k\times 2\equiv 2\ [5]$ *2 puis* $u_n\equiv 9\times 2-6\ [5]$ *ou encore* $u_n\equiv 2\ [5]$*. Dans ce cas,* u_n *n'est pas divisible par 5.*

• *Soient k un entier naturel puis n = 4k + 3. Alors,* $2^n=\left(2^4\right)^k\times 2^3\equiv 3\ [5]$ *puis* $u_n\equiv 9\times 3-6\ [5]$ *ou encore* $u_n\equiv 1\ [5]$*. Dans ce cas,* u_n *n'est pas divisible par 5.*

En résumé, pour tout $n\geq 0$*,* u_n *est divisible par 5 si et seulement si n est de la forme 4k + 2 où k est un entier naturel.*

EXERCICE 2:

Démontrer par récurrence que la proposition P_n *:«* 7^n-2^n *est un multiple de 5 » est vraie pour tout entier naturel n.*

CORRECTION :

Initialisation
Au rang $n=0$ *,* $7^0-2^0=1-1=0$ *. Or, 0 est divisible par 5. Ainsi la propriété* P_n *est vraie au rang* $n=0$*.*
Hérédité
On suppose que la proposition «7^n-2^n *est un multiple de 5 » est vraie pour un certain rang n ; autrement dit, on suppose que pour un entier n positif,* 7^n-2^n *est divisible par 5.*
Regardons la proposition au rang $n+1$ *:* $7^{n+1}-2^{n+1}=7^n\times 7-2^{n+1}\times 2$

$$=7^n\times(2+5)-2^n\times 2$$
$$=7^n\times 2+7^n\times 5-2^n\times 2$$
$$=7^n\times 2-2^n\times 2+7^n\times 5$$
$$=2\times\left(7^n-2^n\right)+7^n\times 5$$

Par hypothèse de récurrence, 7^n-2^n *est un multiple de 5 donc il existe un entier p tel que* $7^n-2^n=5p$*.*
Ainsi, $7^{n+1}-2^{n+1}=2\times 5p+5\times 7^n$

$=5\times\left(2p+7^n\right)$

Comme $2p+7^n$ est un nombre entier, $7^{n+1}-2^{n+1}$ est divisible par 5 et la proposition P_n « 7^n-2^n est un multiple de 5 » est vraie au rang $n+1$:

la propriété est héréditaire.

Conclusion

La proposition P_n « 7^n-2^n est un multiple de 5 » est vraie pour n = 0 et elle est héréditaire donc, par récurrence, pour tout $n\geq 0$, 7^n-2^n est un multiple de 5.

EXERCICE 3:

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel non nul n, la proposition P_n « $A_n=(n+1)(n+2)\cdots(2n-1)(2n)$ est divisible par 2^n » est vraie.

CORRECTION :

Initialisation

Au rang $n=1$, $A_1=2$ et $2^1=2$. Or, 2 est divisible par 2. Ainsi la proposition P_n est vraie au rang $n=1$.

Hérédité

On suppose que la proposition « $A_n=(n+1)(n+2)\cdots(2n-1)(2n)$ est divisible par 2^n » est vraie pour un certain rang n.

Montrons que la propriété au P_{n+1} est vraie : $A_{n+1}=\left(n+1)+1\right)\left((n+1)+2\right)\cdots\left(2(n+1)-1\right)\left(2(n+1)\right)$

$=(n+2)(n+3)\cdots(2n+1)\times 2\times(n+1)$

$=\underbrace{(n+3)\cdots(2n)}_{A_n}\times 2\times(2n+1)$

Par hypothèse de récurrence, A_n est divisible par 2 k donc il existe un entier p tel que $A_n=2^n\times p$.

Ainsi, $A_{n+1}=2^n\times p\times 2\times(2n+1)$

$=2^{n+1}\times\left(p\times(2n+1)\right)$

Comme $p\times(2n+1)$ est un nombre entier, A_{n+1} est divisible par 2^{n+1} et la proposition « $A_n=(n+1)(n+2)\cdots(2n-1)(2n)$ est divisible par 2^n » est vraie au rang $n+1$:

la proposition est héréditaire.

Conclusion

La proposition P_n est vraie pour $n=1$ et elle est héréditaire donc, pour tout $n\geq 1$, $A_n=(n+1)(n+2)\cdots(2n-1)(2n)$ est divisible par 2^n.