Exercice 24

Soit f la fonction numérique définie sur IR par: $f(x)=x^2-2xe^x+2e^x$

Et (C) *sa courbe représentative dans un repère orthonormé* $(O;\vec{i};\vec{j})$

1- Calculer : $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ *et* $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$ *; puis interpréter géométriquement le résultat.*

2- a. Vérifier que: $f(x)=x^2\left(1+2(1-x)\frac{e^x}{x^2}\right)$ *pour tout x de IR.*

b. Calculer : $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ *et* $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ *, puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.*

3- a. Montrer que : $f'(x)=-2x(e^x-1)$ *pour tout x de IR.*

b. Dresser le tableau de variations de f.

4- a. Montrer que l'équation : $f(x)=0$ *admet une unique solution* α *dans IR et que :* $1<\alpha<\frac{3}{2}$.

b. Tracer dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ *la courbe* (C). *(on prend:* $\alpha\simeq 1{,}3$ *)*

Solution

$f(x)=x^2-2xe^x+2e^x$

1) a. ■ *Calculons:* $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

On a $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x^2-2xe^x+2e^x=+\infty$ *(Car* $\lim_{x\to-\infty} xe^x=0$ *et* $\lim_{x\to-\infty} e^x=0$*)*

Donc: $\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty}$

■ *Calculons:* $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$

On a $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty} x-2e^x+2\frac{e^x}{x}=-\infty$ *(Car* $\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{x}=0$ *et* $\lim_{x\to-\infty} e^x=0$*)*

Donc: $\boxed{\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=-\infty}$

Interprétation géométrique:

On a : $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ *et* $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=-\infty$ *; la courbe*

(C) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage $-\infty$.

2) a. Vérifions que :$(\forall x\in IR^*)$

2) a. Vérifions que : $f(x)=x^2\left(1+2(1-x)\frac{e^x}{x^2}\right)$

Soit $x\in IR^*$, *on a:* $f(x)=x^2-2xe^x+2e^x$

$$= x^2\left(1 - 2x \times \frac{e^x}{x^2} + 2\frac{e^x}{x^2}\right)$$

$$= x^2\left(1 - 2(x-1)\frac{e^x}{x^2}\right)$$

$$= x^2\left(1 + 2(1-x)\frac{e^x}{x^2}\right)$$

Donc : $(\forall x \in IR^*)$ $\boxed{f(x) = x^2\left(1 + 2(1-x)\frac{e^x}{x^2}\right)}$

b. Calculons : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$

■ *On a :* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(1 + 2(1-x)\frac{e^x}{x^2}\right) = -\infty$ *(Car* $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$ *)*

■ *On a :* $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1 + 2(1-x)\frac{e^x}{x^2}\right) = -\infty$ *(Car* $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$ *)*

Interprétation géométrique:

donc la courbe (C) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$.

3) a. Montrons que: $(\forall x \in IR)$; $f'(x) = -2x(e^x - 1)$

La fonction f est dérivable sur IR et on a:

$(\forall x \in IR)$; $f'(x) = \left(x^2 - 2xe^x + 2e^x\right)'$

$$= 2x - 2\left(xe^x + e^x\right) + 2e^x$$

$$= 2x - 2xe^x - \cancel{2e^x} + \cancel{2e^x}$$

$$= -2x\left(e^x - 1\right)$$

b. Tableau de variations de f

Soit $x \in IR$ *on a :* $f'(x) = -2x\left(e^x - 1\right)$

Puisque le signe de $\left(e^x - 1\right)$ *est celui de x, alors* $x\left(e^x - 1\right) > 0$ *d'où* $f'(x) > 0$ *pour tout* $x \in IR$

Tableau de variations de f est le suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	-	
$f(x)$	$+\infty$		$\searrow$		$-\infty$

4) a. Montrons que l'équation $f(x) = 0$ *admet une solution unique* α *dans IR.*

On a les fonctions $x \mapsto x$; $x \mapsto x^2$ *et* $x \mapsto e^x$ *sont continue sur IR*

Donc la fonction f est continue sur IR.

D'où f est continue st strictement décroissante sur IR.ET $f\left(]-\infty;+\infty[\right) = \left]\lim\limits_{x\to-\infty} f(x);\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[=]-\infty;+\infty[$ *; puisque* $0 \in]-\infty;+\infty[$ *alors d'après le TVI il existe un unique réel* α *tel que* α *est solution de l'équation* $f(x) = 0$

Montrons que: $1 < \alpha < \frac{3}{2}$

On a : $f(1) = 1$ *et* $f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4} - 3e^{\frac{3}{2}} + 2e^{\frac{3}{2}} = \frac{9}{4} - e^{\frac{3}{2}} < 0$

Donc $f\left(\frac{3}{2}\right)<0<f(1) \Leftrightarrow f\left(\frac{3}{2}\right)<f(\alpha)<f(1)$

Et comme f est strictement décroissante sur IR , alors :

$1<\alpha<\frac{3}{2}$

b. *Construction de* $(\boldsymbol{C})$