guessmaths

Examen nationale 2012 Session de Rattrapage

2éme Bac SM A et B

Exercice 1 : (3,5 points)

I- Pour tout a et b de l'intervalle $I=[1,+\infty[$;on pose : $a\perp b=\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}-1\right)^2$

0.5 1) Montrer que $\perp$ est une loi de composition interne dans I.

0.5 2) Montrer que la loi $\perp$ est commutative et associative dans I.

0.25 3) Montrer que $(I,\perp)$ admet un élément neutre à déterminer.

II- On rappelle que $\left(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),+,\times\right)$ est un anneau unitaire.

$$E=\left\{M(x)=\begin{pmatrix}x & 2(x-1)\\ 0 & 1\end{pmatrix}/\ x\in\mathbb{R}^*\right\}$$

0.5 1) Montrer que E est une partie stable de $\left(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),+,\times\right)$

2) On considère l'application : $\varphi:\begin{matrix}\mathbb{R}^*\to E\\ x\mapsto M(x)\end{matrix}$

0.5 a) Montrer que l'application : φ est un isomorphisme de $(\mathbb{R}^*,\times)$ vers $(E,\times)$.

0.5 b) Déduire la structure de $(E,\times)$.

0.75 c) Montrer que l'ensemble $H=\left\{\begin{pmatrix}2^n & 2^{n+1}-2\\ 0 & 1\end{pmatrix}/\ n\in\mathbb{N}\right\}$ est un sous-groupe de $(E,\times)$

Exercice 2 : (4 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$

I- On considère dans l'ensemble$\mathbb{C}$ l'équation : $(E):z^2-4\left(1+\frac{2}{3}i\right)z+\frac{5}{3}+4i=0$

0.5 1) a- vérifier que le nombre $z_1=1+\frac{2}{3}i$ est une solution de l'équation (E)

0.25 b- En déduire que la deuxième solution de l'équation (E) est $z_2=3z_1$

0.5 2) Soitθ l'argument de z_1

Ecrire en fonction de θ sous forme exponentielle le nombre $\frac{5}{3}+4i$

II- On considère les points A ,B etΩ dont les affixes sont respectivement a ,b et ω.

Soit r la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{3}$; on pose : $P=r(A)$ et$B=r(Q)$

GUESSMATHS.CO

Et p l'affixe du point P ; q l'affixe du point Q.

0.5 1- a) Montrer que : $p=\omega+e^{i\frac{\pi}{3}}(a-\omega)$ et $q=\omega+e^{-i\frac{\pi}{3}}(b-\omega)$

0.25 b) Montrer que : $\dfrac{1-e^{i\frac{\pi}{3}}}{1-e^{-i\frac{\pi}{3}}}=e^{i\frac{4\pi}{3}}$

0.5 c) Montrer que : $\dfrac{p-a}{q-b}=\left(\dfrac{\omega-a}{\omega-b}\right)e^{i\frac{4\pi}{3}}$.

2- On suppose que : $\dfrac{\omega-a}{\omega-b}=e^{i\frac{2\pi}{3}}$

0.25 a) Montrer que le quadrilatère APQB est un parallélogramme.

0.75 b) Montrer que : $Arg\left(\dfrac{b-a}{p-a}\right)\equiv\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$; puis déduire que APQB est un rectangle.

Exercice 3 : (3 points)

0.25 1- a) Vérifier que 503 est un nombre premier.

0.75 b) Montrer que : $7^{502}\equiv 1[503]$; puis déduire que : $7^{2008}\equiv 1[503]$

0.5 2- On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $(E): 49x-6y=1$

Sachant que le couple $(1;8)$ est une solution particulière de (E) ; résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E) en précisant les étapes du calcul.

3- On pose : $N=1+7+7^2+.....+7^{2007}$

0.25 a) Montrer que le couple $(7^{2006};N)$ est solution de l'équation (E).

1 b) Montrer que : $N\equiv 0[4]$ et que $N\equiv 0[503]$

0.25 c)Déduire que N est divisible par 2012.

Exercice 4 : (7.5 points)

I- On considère la fonction numérique g définie sur l'intervalle $[0,+\infty[$ par :

$g(x)=\ln(1+x)-\dfrac{x}{1+x}$

0.5 1) Etudier les variations de g sur l'intervalle $[0,+\infty[$.

0.5 2) Déduire le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $[0,+\infty[$.

II- Soit la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=e^x\ln(1+e^{-x})$

1 1) Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

0.5 2) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$; on a : $f'(x) = e^x g\left(e^{-x}\right)$

0.5 3) Dresser le tableau de variations de f.

1 4) Construire la courbe (C) représentative de f et (C') celle de (-f) dans un même repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ (on accepte que $-0,7$ est une valeur approchée de l'abscisse de l'unique point d'inflexion de (C).

0.75 5) Montrer que pour tout $x \in [-1,0]$; on a : $0 < f'(x) \leq g(e)$

0.75 6) Montrer que l'équation $f(x) + x = 0$ admet une unique α solution dans $\mathbb{R}$ et que $-1 < \alpha < 0$

7) On considère la suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = -f\left(u_n\right) \end{cases} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

0.5 a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $-1 \leq u_n \leq 0$

0.75 b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $\left|u_{n+1} - \alpha\right| \leq g(e)\left|u_n - \alpha\right|$

0.5 c) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $\left|u_n - \alpha\right| \leq \left(g(e)\right)^n$

0.25 d) Sachant que $g(e) < 0,6$; calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

Exercice 5 : (2.5 points)

On considère la fonction numérique définie sur $]0,+\infty[$ par : $F(x) = \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{\ln t}{1+t^2}\,dt$

0.25 1) Calculer $F(1)$

0.75 2) a) Montrer que la fonction F est dérivable sur $]0,+\infty[$; puis calculer $F'(x)$

0.5 b) Déduire que pour tout $x \in]0,+\infty[$; on a : $F(x) = 0$

0.5 3) En utilisant une intégration par parties montrer que pour tout $x \in]0,+\infty[$; on a : $F(x) = \left(\operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)\right)\ln x - \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{\operatorname{Arctan}(t)}{t}\,dt$

0.25 4) Montrer que : $(\forall x > 0)$; $\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}(x)$

0.25 4) Montrer que : $(\forall x > 0)$; $\ln x = \frac{2}{\pi}\int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{\operatorname{Arctan}(t)}{t}\,dt$

GUESSMATHS.CO