

Exercice 1

Soit f la fonction définie par :
$$\begin{cases} f(x) = x + 2 - \sqrt{x^2 + 2x} & ; \text{si } x < -2 \\ f(x) = \text{Arctan}(\sqrt{x+2}) & ; \text{si } x \geq -2 \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue en $x_0 = -2$
2. Etudier la dérivabilité de f en $x_0 = -2$; puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.
3. a) Calculer $f'(x)$ sur les deux intervalles $]-\infty; -2[$ et $]-2; +\infty[$.
b) Dresser le tableau de variations de f .
4. Etudier les branches infinies de (C_f) .
5. Montrer que : $(\forall x \in]-\infty; -2[); f(x) > 2x + 3$, puis interpréter ce résultat.
6. Représenter (C_f) . (On prend $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2\text{cm}$)
7. Soit g la restriction de f sur $I =]-\infty; -2]$
a) Montrer que g est une bijection de I vers un intervalle J à déterminer
b) Déterminer $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

II. Soit h La restriction de f sur $[0; 2]$.

Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = h(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. a) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) ; \text{Arctan}(x) < x$
b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 \leq u_n \leq 2$
c) Montrer que (u_n) est décroissante.
2. a) Montrer que l'équation $h(x) = x$ admet une unique solution $\alpha \in]0; 2[$.
b) Montrer que : $(\forall x \in [0; 2]); h'(x) \leq \frac{1}{6\sqrt{2}}$
c) Montres que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{6\sqrt{2}} |u_n - \alpha|$
d) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

Exercice 2:

Soit f la fonction définie par :
$$\begin{cases} f(x) = -\sqrt[3]{1-x^3} & ; \text{si } x \leq 1 \\ f(x) = 2\text{Arctan}\left(\frac{x-1}{x+1}\right) & ; \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. a) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
b) Etudier les branches infinies de (C_f)
2. Étudier la dérivabilité de f en 1; puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.

3. a) Calculer $f'(x)$ sur les deux intervalles $]-\infty; 1[$ et $]1; +\infty[$
 b) Dresser le tableau de variations de f .
- 4- Montrer que $A(0; -1)$ est un point d'inflexion de (C_f) .
5. a) Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ vers un intervalle J à déterminer.
 b) Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.
6. Représenter (C_f) et $(C_{f^{-1}})$ dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-1; +\infty[$ par :
$$\begin{cases} f(x) = \frac{\text{Arctan} \sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}} & ; \text{si } x > -1 \\ f(-1) = 1 \end{cases}$$

1. a) Montrer que f est continue en -1 à droite.
 b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$; puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.
2. Soit $x \in]0; +\infty[$ On pose que : $\varphi(t) = t^3 (\text{Arctan} x - x) - x^3 (\text{Arctan} t - t)$
 a) Montrer que φ est dérivable sur l'intervalle $]0; x[$ et calculer $\varphi'(t)$.
 b) Montrer que : $\exists c \in]0; x[\text{ tel que } \frac{\text{Arctan} x - x}{x^3} = \frac{-1}{3(1+c^2)}$
3. a) Étudier la dérivabilité de f à droite de -1 .
4. a) À l'aide du théorème des accroissements finis, montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^+)$;

$$\frac{x}{1+x^2} \leq \text{Arctan}(x) \leq x$$

b) Montrer que : $(\forall x \in]-1; +\infty[)$;
$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{(x+1)^3}} \left(\frac{\sqrt{x+1}}{x+2} - \text{Arctan} \sqrt{x+1} \right)$$

c) En déduire que f est strictement décroissante sur l'intervalle $[-1; +\infty[$

5. a) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α sur $]-1; +\infty[$ et que $\alpha \in]0; 1[$

b) Représenter (C_f) . (On prend $\alpha = 0,7$)

6. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $g(x) = \frac{x}{1+x^2} - \text{Arctan}(x)$

a) Calculer $g'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$; puis dresser le tableau de variations de g .

b) En déduire que : $(\forall x \in \mathbb{R}^+) ; |g(x)| \leq \frac{\pi}{2}$

c) Montrer que : $(\forall x \in]0; 1[) ; |f'(x)| \leq \frac{\pi}{4}$

7. Soit (u_n) une suite numérique définie par : $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 < u_n < 1$

b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{\pi}{4} |u_n - \alpha|$

c) Montrer (u_n) est convergente et déterminer sa limite .

Exercice 4

On considère le fonction définie par: $f(x) = 2\text{Arctan}\left(\frac{2\sqrt{x}}{x+1}\right)$.

Et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1) a) Déterminer D_f le domaine de définition de f ; puis calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

b) Montrer que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ et donner une interprétation géométrique à ce résultat.

2) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in D_f$; puis dresser le tableau de variation de f

3) Construire (C_f) dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

4) Soit g le restriction de f sur l'intervalle $I = [1; +\infty[$.

a) Montrer que g réalise une bijection de I vers un intervalle J à déterminer.

b) Déterminer $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

c) Construire le courbe $(C_{g^{-1}})$ dans le même repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

5) Montrer que l'équation $g(x) = x$ admet une unique solution α dans l'intervalle $]1; 2[$.

6) On considère la suite (u_n) définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = g(u_n) \end{cases} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

a) Montrer que $g(2) > \frac{\pi}{3}$

b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 1 \leq u_n \leq 2$

c) Montrer que: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4} |u_n - \alpha|$

d) Montrer que la suite (u_n) est convergente puis calculer sa limite.