L'intégrale définie d'une fonction continue sur un segment de IR — **2éme Bac SM**

1. Définition

f étant une fonction continue sur un intervalle $I=[a;b]$. *F une primitive de f sur I .*

On pose : $\int_a^b f(x)\,dx=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$

le nombre réel $\int_a^b f(x)\,dx$ *est lu somme de a à b de* $f(x)dx$ *, ou intégrale de a à b de* $f(x)dx$.

Exemple 1

$$\int_0^1 x^2\,dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{1}{3}\times1^3-\frac{1}{3}\times0^3=\frac{1}{3}$$

Exemple 2

$$\int_1^4 \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx=\left[\sqrt{x}\right]_1^4=\sqrt{4}-\sqrt{1}=2-1=1$$

2. Propriétés algébriques

S et g deux fonctions continues sur un intervalle $I=[a;b]$. *F et G des primitives respectives de f et g sur I. On a:*

- $\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx=\int_a^b f(x)\,dx+\int_a^b g(x)\,dx$ *(1ére relation de bilinéarité)*
- $(\forall\alpha\in\mathbb{R})$; $\int_a^b \alpha.f(x)\,dx=\alpha.\int_a^b f(x)\,dx$ *(2éme relation de bilinéarité)*
- $\forall c\in[a;b]$ $\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx$ *(Relation de Chasles)*

I. Intégrale définie et relation d'ordre

Théorème

f et g deux fonctions continues sur un intervalle $I=[a;b]$. *On a :*

- $\forall x\in I\ ;\ f(x)\geq0\Rightarrow\int_a^b f(x)\,dx\geq0$.

Corollaire

- $\forall x\in I\ ;\ f(x)\geq g(x)\Rightarrow\int_a^b f(x)\,dx\geq\int_a^b g(x)\,dx$.

II. L'intégration par parties

Théorème

f et g étant deux fonctions dérivables sur un intervalle $[a;b]$.

On a: $\int_a^b u'(x)v(x)\,dx=[u(x)v(x)]_a^b-\int_a^b u(x)v'(x)\,dx$

Exercice

Calculer moyennant une intégration par parties chacune des intégrales suivantes:

- $I=\int_1^e x\ln(x)dx$
- $J=\int_0^1 xe^x dx$
- $K=\int_1^e \ln(x)dx$
- $L=\int_0^1 \text{Arctan}(x)dx$
- $M=\int_0^{\frac{1}{2}}(2x-1)e^{2x}dx$
- $N=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(x)dx$
- $P=\int_1^e \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}dx$
- $Q=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2(x)}dx$

III. L'intégration par changement de variable

Théorème

f et g étant deux fonctions dérivables sur un intervalle $[a;b]$. On a:

$$\int_a^b f\left(g(x)\right)g'(x)\ dx=\int_{g(a)}^{g(b)} f'(x)\ dx \quad \text{où } t=g(x)$$

Exercice

Calculer moyennant une intégration par parties chacune des intégrales suivantes :

- $I=\int_1^e \frac{dx}{x\left(1+\ln^2(x)\right)}$; $t=\ln(x)$
- $J=\int_1^2 x\sqrt{2-x}dx$; $t=\sqrt{2-x}$
- $K=\int_{-1}^0 \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$; $t=1+\sqrt[3]{x+1}$
- $L=\int_0^3 \frac{x^2}{\sqrt{1+x}}dx$; $t=\sqrt{1+x}$
- $M=\int_2^4 \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$; $t=\sqrt{x-1}$
- $N=\int_1^e \frac{\ln\left(1+\sqrt{x}\right)}{x+\sqrt{x}}dx$; $t=1+\sqrt{x}$

IV. L'encadrement d'une intégrale définie par deux suites convergentes

Théorème

f étant une fonction continue sur un intervalle [a b].

On pose : $S_n=\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)$ et $S_n'=\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)$

Les suites (S_n) et $\left(S_n'\right)$ convergentes toutes les deux vers $\int_a^b f(x)\ dx$.

Exemple 1

On pose : $U_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$

On a: $U_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)}$; donc $\lim_{n\to+\infty}U_n=\int_1^2 f(x)dx$ où $f(x)=\frac{1}{1+x}$

Alors : $\lim_{n\to+\infty}U_n=\int_1^2\frac{1}{1+x}dx=\left[\ln(1+x)\right]_1^2=\ln 3-\ln 2.$

WWW.GUESSMATHS.CO

Exemple 2

On pose : $U_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{n}{n+k}\right)^2$

On a: $U_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)}\right)^2$; *donc* $\lim_{n\to+\infty} U_n = \int_1^2 f(x)dx$ *où* $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

Alors : $\lim_{n\to+\infty} U_n = \int_1^2 \frac{1}{1+x^2}dx = \left[\operatorname{Arctan}(x)\right]_1^2 = \operatorname{Arctan}(2) - \operatorname{Arctan}(1)$.

Exemple 3

On pose : $U_n = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n^2+k^2}$

On a: $U_n = \frac{1}{n}\times\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}\right)$; *donc* $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2} = \int_0^1 f(x)dx = A \in \mathbb{R}$ *où* $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

Alors : $\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\times A\right) = 0$.

WWW.GUESSMATHS.CO