EXERCICE 1:

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]1;+\infty[$ *par :* $f(x)=\ln x-\dfrac{1}{\ln x}$.

(C_f) *sa courbe représentative et* (Γ) *la courbe d'équation* $y=\ln x$ *dans un repère orthonormé* $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. *Etudier les variations de la fonction f ; et calculer* $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2. a. *Déterminer* $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-\ln x\right)$ et *interpréter graphiquement cette limite*

   b. *Préciser les positions relatives de* (C_f) *et de* (Γ).

3. *On se propose de chercher les tangents à la courbe* (C_f) *passant par le point O*

   a. *Soit a un réel appartenant à l'intervalle* $]1;+\infty[$.

   Démontrer que la tangente (T_a) *à* (C_f) *au point d'abscisse a passe par l'origine du repère si et seulement si* $f(a)-a\,f'(a)=0$.

4. *Soit g la fonction définie sur l'intervalle* $]1;+\infty[$ *par :* $g(x)=f(x)-xf'(x)$.

   a. *Montrer que sur* $]1;+\infty[$, *les équations* $g(x)=0$ *et* $(\ln x)^3-(\ln x)^2-\ln x-1=0$ *ont les mêmes solutions.*

   b. *Apres avoir étudié les variations de la fonction u définie sur R par* $u(t)=t^3-t^2-t-1$ *montrer que la fonction u s'annule une fois et une seule sur IR.*

   c. *En déduire l'existence d'une tangente unique à la courbe* (C_f) *passant par le point O.*

   d. *Tracer cette tangente et la courbe* (C_f).

5. *On considère un réel m et l'équation* $f(x)=mx$ *d'inconnue x*

Par lecture graphique et sans justification, donner suivant les valeurs du réel m, le nombre de solutions de cette équation appartenant à l'intervalle $[1;10]$.

EXERCICE 2:

Partie A

Soit u la fonction définie sur $]0;+\infty[$ *par :* $u(x)=x^2-2+\ln x$.

1. *Etudier les variations de u sur* $]0;+\infty[$ *et calculer* $\lim\limits_{x\to 0^+} u(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)$.

2. a. *Montrer que l'équation* $u(x)=0$ *admet une solution unique sur* $]0;+\infty[$ *On note* α *cette solution*

   b. *Déterminer un encadrement d'amplitude* 10^{-2} *de* α.

3. *Déterminer le signe de* $u(x)$ *suivant les valeurs de x.*

4. *Montrer que :* $\ln\alpha=2-\alpha^2$.

Partie B

On considère la fonction f définie et dérivable sur $]0;+\infty[$ *par :* $f(x)=x^2+(2-\ln x)^2$.

On note f' *la fonction dérivée de f sur* $]0;+\infty[$.

1. *Exprimer, pour tout x de* $]0;+\infty[$ $f'(x)$ *en fonction de* $u(x)$.

2. En déduire les variations de f sur $]0;+\infty[$.

Partie C

Dans le plan rapport à un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ on note.

■ Γ la courbe représentative de la fonction $\ln$.

■ A le point de coordonnées $(0;2)$.

■ M le point de Γ d'abscisse x appartenant à $]0;+\infty[$.

1. Montrer que la distance AM est donnée par $AM=\sqrt{f(x)}$.

2. Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x)=\sqrt{f(x)}$.

   a. Montrer que les fonctions f et g ont les mêmes variations sur $]0;+\infty[$.

   b. Montrer que la distance AM est minimale en un point de Γ , note P , dont on préciser les coordonnées.

   c. Montrer que $AP=\alpha\sqrt{1+\alpha^2}$.

3. La droite (AP) est-elle perpendiculaire à la tangente à Γ en P .

EXERCICE 3:

1. On considère la fonction f : $x\mapsto\dfrac{x}{x^2+x+1}$

Montrer que f est définie et dérivable sur IR et déterminer la fonction dérivée f' de f.

2. On considère la fonction g: $x\mapsto\dfrac{\ln x}{(\ln x)^2+\ln x+1}$ et on désigne par Γ sa courbe représentative dans un repère orthonormé d'unités graphiques 1 cm.

   a. Exprimer g en fonction de f et préciser l'ensemble de définition de g.

   b. Déterminer la fonction dérivé g' de g (on pourra utiliser la question 1.)

   c. Etudier le signe de $g'(x)$ suivant les valeurs de x.

   d. Calculer $\lim\limits_{x\to0^+}g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$.

   e. Dresser le tableau des variations de g

   f. Construire la courbe Γ et la tangente au point d'abscisse 1.

EXERCICE 4:

Soit f la fonction définie pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0;1]$ par: $f(x)=1+x\ln x$

(C) est la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$; T est la droite d'équation $y=x$.

1. a. Montrer que $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=1$.

   b. En utilisant le signe de $(x\ln x)$ sur $]0;1]$,montrer que, pour tout nombre réel $x\in]0;1]$,on a : $f(x)\le1$.

2. a. Calculer $f'(x)$ pour tout nombre réel $x\in]0;1]$.

   b. Vérifier que la droite T est tangente à la courbe (C) au point d'abscisse 1.

3. On note g la fonction définie pour tout nombre réel $x\in]0;1]$ par : $g(x)=1+x\ln x-x$

   a. Etudier les variations de g sur l'intervalle $]0;1]$ et dresser le tableau de variation de g.

   b. En déduire les positions relatives de la courbe (C) et de la droite T.

EXERCICE 5:

Partie A

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]1;+\infty[$ *par :* $f(x)=\dfrac{x}{\ln x}$

1. a. Calculer $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.

b. Etudier les variations de la fonction f.

2. Soit (u_n) *la suite définie par :* $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad (\forall n \in IN) \end{cases}$.

a. Construire la courbe (C_f) *de f ; la droite d'équation* $y=x$ *et les points* M_1 *et* M_2 *de la courbe* (C_f) *d'abscisses respectives* u_1 *et* u_2.

b. Démontrer que pour tout entier naturel n, on a : $u_n > e$ *(on pourra utiliser la question 1. b)*

c. Démontrer que la suite (u_n) *converge vers un réel* ℓ *de l'intervalle* $[e;+\infty[$.

Partie B

On rappelle que la fonction f est continue sur l'intervalle $]1;+\infty[$.

1. En étudiant de deux manières la limite de la suite $(f(u_n))$, *montrer que ;* $f(\ell)=\ell$.

2. En déduire la valeur de ℓ.

EXERCICE 6:

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]-1;+\infty[$ *par :* $f(x)=x-\dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$.

Et sa courbe (C) *représentative dans un repère orthonormé* $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Partie A:

1.On note f' *la fonction dérivé de f*

Calculer $f'(x)$ *pour tout x de l'intervalle* $]-1;+\infty[$.

2. Pour tout x de l'intervalle $]-1;+\infty[$ *, on pose :* $h(x)=(1+x)^2-1+\ln(1+x)$.

Vérifier que h une fonction strictement croissante sur $]-1;+\infty[$

Calculer $h(0)$*. En déduire les variations de f.*

3. Soit (D) *la droite équation* $y=x$.

Calculer les coordonnées du point d'intersection de la courbe (C) *et de la droite* (D).

Partie B:

L. Démontrer que si $x\in[0;4]$ *, alors* $f(x)\in[0;4]$

2. On considère la suite (u_n) *définie par:* $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad (\forall n \in IN) \end{cases}$

a. Calculer u_1 *;* u_2 *et* u_3.

b. Démontrer que pour tout n de IN on a: $u_n \in [0;4]$

c. Etudier la monotonie de la suite (u_n).

d. Démontrer que la suite (u_n) *est convergente*

On désigne par ℓ *sa limite.*

e. Utiliser la partie A pour donner la valeur de ℓ .