Repére dans le plan

On se place dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ du plan.

I. Rappels sur les équations de droites

Critère de colinéarité :

$\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ sont colinéaires si et seulement si $xy' - yx' = 0$.

Vecteur directeur d'une droite :

Un vecteur directeur d'une droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ est $\vec{u}(-b\,;a)$.

Propriété :

Les droites d'équation $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$ sont parallèles si et seulement si $ab' - a'b = 0$.

Méthode :

Déterminer une équation de droite à partir d'un point et d'un vecteur directeur

On considère un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ du plan.

1) Déterminer une équation cartésienne de la droite *d* passant par le point A(3 ; 1) et de vecteur directeur $\vec{u}(-1\,;5)$.

2) Déterminer une équation cartésienne de la droite *d'* passant par les points B(5;3) et C(1; –3).

1) Soit un point M(x ; y) de la droite *d*.

Les vecteurs $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-3\\y-1\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix}$ sont colinéaires, soit :

$5(x-3)-(-1)(y-1)=0$.

Soit encore : $5x+y-16=0$.

Une équation cartésienne de *d* est : $5x+y-16=0$.

Remarque :

Une autre méthode consiste à appliquer le premier théorème énoncé plus haut.

Ainsi, comme $\vec{u}(-1\,;5)$ est un vecteur directeur de *d*, une équation de *d* est de la forme :

$5x+1y+c=0$.

Pour déterminer c, il suffit de substituer les coordonnées de A dans l'équation.

2) $\overrightarrow{BC}$ est un vecteur directeur de *d'*.

$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}1-5\\-3-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\-6\end{pmatrix}$.

Une équation cartésienne de *d'* est de la forme : $-6x+4y+c=0$.

B(5 ; 3) appartient à *d'* donc : –6 x 5 + 4 x 3 + c = 0 donc c = 18.

Une équation cartésienne de *d'* est : $-6x+4y+18=0$ ou encore $3x-2y-9=0$.

Tracer une droite dans un repère :

Équation cartésienne et équation réduite

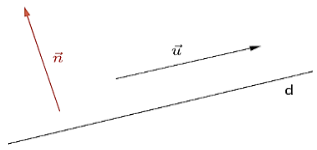
Si $b \neq 0$, alors l'équation cartésienne $ax+by+c=0$ de la droite D peut être ramenée à une équation réduite. $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$

Le coefficient directeur de D est $-\frac{a}{b}$, son ordonnée à l'origine est $-\frac{c}{b}$ et un vecteur directeur de D est $\left(1\,;-\frac{a}{b}\right)$.

Exemple :
Soit *d* dont une droite d'équation cartésienne $4x + y - 6 = 0$.
Son équation réduite est $y = -4x + 6$.

II. Équation de droite de vecteur normal donné

Définition : Soit une droite *d*.
On appelle **vecteur normal** à une droite *d*, un vecteur non nul orthogonal à un vecteur directeur de *d*.



Exemple :
Soit la droite *d* d'équation cartésienne $2x - 3y - 6 = 0$.
Un vecteur directeur de *d* est : $\vec{u}(3\,;2)$.
Un vecteur normal $\vec{n}(a\,;b)$ de *d* est tel que : $\vec{u}.\vec{n} = 0$
Soit : $3a + 2b = 0$.
a = –2 et b = 3 conviennent, ainsi le vecteur $\vec{n}(-2\,;3)$ est un vecteur normal de *d*.

Propriétés :
- Une droite de vecteur normal $\vec{n}(a\,;b)$ admet une équation cartésienne de la forme $ax + by + c = 0$ où c est un nombre réel à déterminer.
- Réciproquement, la droite *d* d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ admet le vecteur $\vec{n}(a\,;b)$ pour vecteur normal.

Démonstrations :
- Soit un point A$(x_A\,;\,y_A)$ de la droite *d*.
M$(x\,;y)$ est un point de *d* si et seulement si $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \end{pmatrix}$ et $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ sont orthogonaux.
Soit : $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$
Soit encore : $a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0$
$ax + by - ax_A - by_A = 0$.
- Si $ax + by + c = 0$ est une équation cartésienne de *d* alors $\vec{u}(-b\,;a)$est un vecteur directeur de *d*.
Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ vérifie : $-b \times a + a \times b = 0$. Donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux.

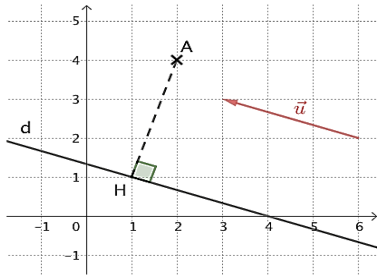
Méthode :
Déterminer une équation de droite connaissant un point et un vecteur normal
Dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ du plan, on considère la droite *d* passant par le point $A(-5\,;4)$ et dont un vecteur normal est le vecteur $\vec{n}(3\,;-1)$.
Déterminer une équation cartésienne de la droite *d*.

Comme $\vec{n}(3\,;-1)$ est un vecteur normal de *d*, une équation cartésienne de *d* est de la forme $3x - y + c = 0$
Le point $A(-5\,;4)$ appartient à la droite *d*, donc : $3 \times (-5) - 4 + c = 0$ et donc :
$c = 19$.
Une équation cartésienne de *d* est : $3x - y + 19 = 0$.

Méthode :
Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal d'un point sur une droite

Soit la droite *d* d'équation $x + 3y - 4 = 0$ et le point A de coordonnées (2 ; 4).
Déterminer les coordonnées du point H, projeté orthogonal de A sur la droite *d*.

- On commence par déterminer une équation de la droite (AH) :
Comme *d* et (AH) sont perpendiculaires, un vecteur directeur de *d* est un vecteur normal de (AH).
Une équation cartésienne de *d* est $x + 3y - 4 = 0$,
donc le vecteur $\vec{u}(-3\,;1)$ est un vecteur directeur de *d*.
Et donc $\vec{u}(-3\,;1)$ est un vecteur normal de (AH).
Une équation de (AH) est de la forme
$-3x + y + c = 0$.



Or, le point A(2 ; 4) appartient à (AH), donc ses coordonnées vérifient l'équation de la droite.
On a : $-3 \times 2 + 4 + c = 0$ soit $c = 2$.
Une équation de (AH) est donc : $-3x + y + 2 = 0$.

- H est le point d'intersection de *d* et (AH), donc ses coordonnées $(x\,;y)$ vérifient les équations des deux droites. Résolvons alors le système :

$$\begin{cases} x + 3y - 4 = 0 \\ -3x + y + 2 = 0 \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} x = -3y + 4 \\ -3(-3y + 4) + y + 2 = 0 \end{cases} \text{ soit encore } \begin{cases} x = -3y + 4 \\ 10y - 10 = 0 \end{cases}$$

$$\text{soit enfin } \begin{cases} x = -3y + 4 \\ y = \frac{10}{10} = 1 \end{cases} \text{ et donc } \begin{cases} x = -3 \times 1 + 4 = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Le point H, projeté orthogonal de A sur la droite *d*, a pour coordonnées (1 ; 1).

III. Équations de cercle

Propriété :
Une équation du cercle de centre $A(x_A\,;\,y_A)$ et de rayon *r* est :
$(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = r^2$

Éléments de démonstration :
Tout point $M(x\,;y)$ appartient au cercle de centre $A(x_A\,;\,y_A)$ et de rayon r si et seulement $AM^2 = r^2$.
Méthode : Déterminer une équation d'un cercle

Dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ du plan, on considère le cercle *C* de centre $A(4\,;-1)$ et passant par le point $B(3\,;5)$.
Déterminer une équation du cercle *C*.
Commençons par déterminer le carré du rayon du cercle *C* :
$r^2 = AB^2 = (3-4)^2 + \left(5-(-1)\right)^2 = 37$
Une équation cartésienne du cercle *C* est alors : $(x-4)^2 + (y+1)^2 = 37$.
Méthode :
Déterminer les caractéristiques d'un cercle
Dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ du plan, on considère l'ensemble E d'équation :
$x^2 + y^2 - 2x - 10y + 17 = 0$. Démontrer que l'ensemble E est un cercle dont on déterminera les caractéristiques (centre, rayon).
$x^2 + y^2 - 2x - 10y + 17 = 0$
$(x^2 - 2x) + (y^2 - 10y) + 17 = 0$
$(x-1)^2 - 1 + (y-5)^2 - 25 + 17 = 0$
$(x-1)^2 + (y-5)^2 = 9$
$(x-1)^2 + (y-5)^2 = 3^2$

L'ensemble E est le cercle de centre le point de coordonnées (1 ; 5) et de rayon 3.