Série n° 6 exercices « Les suites » **2éme Bac SM**

EXERCICE 1:

On considère la suite (U_n) *définie sur IN * par :* $\begin{cases} U_1 = \dfrac{1}{2} \\ U_{n+1} = \dfrac{2U_n}{1+U_n^2} \qquad (\forall n \in IN^*) \end{cases}$

1) a/ Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $0 < U_n < 1$.

b/ Montrer que (U_n) *est strictement croissante.*

c/ En déduire que la suite (U_n) *est convergente et déterminer sa limite.*

2) On pose, pour tout $n \geq 1$, $V_n = \dfrac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{n} 2^k U_k$.

a/ Montrer que, pour tout $n \geq 1$: $V_{n+1} - V_n = \dfrac{1}{2^{n+1}}\left[2^{n+1}U_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} 2^k U_k\right]$

b/ Montrer que, pour tout $n \geq 1$, *on a :* $\sum_{k=1}^{n} 2^k U_k < 2^{n+1}U_{n+1}$, *en déduire que la suite* (V_n) *est croissante.*

c/ En utilisant la relation précédente, montrer que $V_n < 2$ *et que la suite* (V_n) *est convergente.*

3) a/ Vérifier que, pour tout n ≥1 on a : $\dfrac{2^{n+1}}{U_{n+1}} - \dfrac{2^n}{U_n} = 2^n U_n$, *en déduire que :* $V_n = \dfrac{2}{U_{n+1}} - \dfrac{1}{2^{n-2}}$.

b/ En déduire la limite de la suite (V_n).

EXERCICE 2:

1) On donne deux suites (U_n) *et* (V_n) *définies sur* IN^* :

$$U_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{1}{\sqrt{k+n}}\right) \text{ et } V_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+n}}$$

a- Vérifier que pour tout $n \in IN^*$ *et pour tout*

$k \in \{1;2;3;.....;n\}$ *on a :* $\dfrac{1}{\sqrt{2n}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{n+k}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$.

b- En déduire que pour tout $n \in IN^*$:

$$\frac{\sqrt{2n}}{2} \leq \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n+k}} \leq \frac{n}{\sqrt{n+1}}$$

c- Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{V_n}{n}$

2) On considère la fonction f définie sur $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ *par :* $f(x) = x - 1 + \cos x$

Etudier les variations de f et montrer que : $1 - x \leq \cos x \leq 1$ *pour tout* $x \in \left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

3) a- Vérifier que $1 - \dfrac{1}{\sqrt{k+n}} \leq \cos\left(\dfrac{1}{\sqrt{k+n}}\right) \leq 1$ *et que* $1 - \dfrac{V_n}{n} \leq U_n \leq 1$.

b- Déterminer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.