Série n°28 Exercices sur « Dérivabilité et Etude de fonction »

2éme Bac PC

Exercice 1 (3 points)

On définit la fonction f sur $\mathbb{R}^*$ *par :* $f(x)=\dfrac{\sqrt{4x^2+x+1}}{x}$

1) Montrer que pour tout réel $x\geq 0$; $4x^2\leq 4x^2+x+1\leq (2x+1)^2$

2) En déduit que pour tout réel $x\geq 0$; $2\leq f(x)\leq \dfrac{2x+1}{x}$

3) Calcule la limite de f en $+\infty$.

Exercice 2 (5 point)

Soit f la fonction dérivable et définie sur $D_f=\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$ *par :* $f(x)=|x+1|+\dfrac{x}{x^2-1}$

Et (C_f) *sa courbe représentative dans un repère orthonormé* $(O;\vec{i};\vec{j})$*.(unité graphique 2cm)*

1) a. Pour tout x de D_f *donné f l'écriture de f sans la valeur absolue.*

b. Calculer les limités de f aux des intervalles de D_f.

Eventuellement, en donnera une interprétation graphique pour chacune de ces résultats.

c. Montrer que les droites (D): $y=-x-1$ *et* (D'): $y=x+1$ *sont asymptotes ā* (C_f) *respectivement en* $-\infty$ *et en* $+\infty$.

2- a. Exprime $f'(x)$ *et étudie son signe sur chacun des intervalles de* D_f.

b. En déduis le sens de variation de f puis dresse son tableau de variation.

3 - Trace (C_f) ; (D) *et* (D')

Exercice3:

Calculer les deux limites suivantes :

► $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{1-\sqrt[3]{2x+1}}$ ► $\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt[3]{x^3-3x+1}-\sqrt[3]{x^3+2}$ ► $\lim\limits_{x\to -\infty} x+\sqrt[3]{x^2-x^3}$

Exercice 4:

1) Montrer que l'équation $2x^3+3x=5$ *admet une seule solution dans* $\mathbb{R}$.

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ *l'équation :* $(E):\dfrac{8}{(3x-4)^5}=\dfrac{1}{4}$

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ *l'inéquation :* $(I):\sqrt[3]{2x^2+x+1}-1<x$

Exercice 5:

On considère la fonction f définie par : $f(x)=\dfrac{2}{\sqrt[3]{1-8x^3}}$

1) Déterminer D_f *le domaine de définition de f.*

2) Calculer $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}^-} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$

3) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in D_f$

4) a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

b) Déterminer $f^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)$.

Exercice 6:

Soit f une fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = x - \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$

Et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. a. Calculer $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim_{x\to +\infty} f(x)$

b. Déterminer les branches infinies de (C_f).

2. a. Montrer que pour tout x de $]0;+\infty[$: $f'(x) = \left(\frac{2x+\sqrt{x}+1}{2x\sqrt{x}}\right)(\sqrt{x}-1)$

b. Dresser le tableau de variations de f.

3. Tracer la courbe (C_f) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

4. Soit g la restriction de f sur l'intervalle $[1;+\infty[$.

a. Montrer que la fonction g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J qu'on précisera

b. Tracer la courbe $(C_{g^{-1}})$

Exercice 2 :

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{x}{2}\left(x + \sqrt{x^2+4}\right)$

Et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. Calculer $\lim_{x\to +\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to -\infty} f(x)$

2. a. Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$: $f'(x) = \frac{\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)^2}{2\sqrt{x^2+4}}$

b. En déduire les variations de la fonction f.

3 .a. Etudier les branches infinies (C_f).

b. Donner l'équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse $x_0 = 0$.

c. Tracer la courbe (C_f) et la tangente (T) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

4. a. Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J qu'on précisera

b. Tracer la courbe $(C_{f^{-1}})$ dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Exercice 3:

Soit f une fonction définie par : $f(x) = x + \sqrt{x^2+2x}$

1. *Déterminer le* D_f *puis calculer* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2. *Montrer que* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$ *puis donner une interprétation géométrique au résultat.*

3. *Etudier la dérivabilité de f à droite en* 0 *et à gauche en* -2.

4. *a. Montrer que pour tout x de* $]-\infty;2[\cup]0;+\infty[$ *que :* $f'(x) = \dfrac{x+1+\sqrt{x^2+2x}}{\sqrt{x^2+2x}}$

   b. En déduire que f est strictement croissante.