Exercice 1

1) Soit la suite numérique (U_n) définie par : $\begin{cases} U_0 = -1 \\ U_{n+1} = \dfrac{1}{2-U_n} \end{cases} \quad ;(\forall n \in IN)$

a) Calculer U_1 et U_2.

b) Montrer par récurrence que $(\forall n \in IN);U_n \leq 1$.

c) Montrer que (U_n) est strictement croissante.

2) Soit la suite numérique (V_n) définie par : $V_n = \dfrac{2}{1-U_n}$.

a) Montrer que (V_n) est une suite arithmétique et préciser sa raison et son premier terme.

b) Calculer V_n puis U_n en fonction de n.

c) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

d) On pose : $S_n = \dfrac{1}{U_0-2} + \dfrac{1}{U_1-2} + ... + \dfrac{1}{U_{n-1}-2} + \dfrac{1}{U_n-2}$; pour tout $n \in IN$

Déterminer S_n en fonction de n.

e) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

Exercice 2

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct$(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$, on considère les points $A(2;1;3)$; $B(3;1;1)$; $C(2;2;1)$ et la sphère (S)d'équation :
$x^2+y^2+z^2-2x+2y-34=0$.

1) a) Montrer que $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=2\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$ en déduire que les points A ; B et C sont non alignés.

b) Montrer que $2x+2y+z-9=0$ est une équation cartésienne du plan(ABC) .

2) a) Montrer que le centre de la sphère (S) est $\Omega(1;-1;0)$ et que son rayon est6.

b) Montrer que $d(\Omega;(ABC))=3$, en déduire que le plan(ABC)coupe la sphère (S) suivant un cercle(Γ)

3) a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ)passant par Ω et perpendiculaire au plan (ABC).

b) Montrer que le centre du cercle (Γ) est le point B.

Exercice 3

Dans le plan complexe, muni au repère orthonormé direct$(O;\vec{e_1};\vec{e_2})$, on considère les points A ; B ; C et D ; d'abscisses respectives :$a=-1+i$;$b=3+2i$; $c=-2-3i$ et $d=2-2i$.

1) a) Vérifier que : $(z+1-i)(z-2+2i)=z^2-(1-i)z+4i$

b) En déduire les solutions de l'équation : $z^2-(1-i)z+4i=0$.

c) Ecrire les complexes $a=-1+i$ et $d=2-2i$ sous forme exponentielle

2) a) Calculer $\frac{d}{a}$, que peut-on déduire des points A et O et D . Justifier

b) Déterminer k le rapport de l'homothétie h de centre O et qui transforme A en D.

c) Déterminer l'expression complexe de h.

3) soit T la translation qui transforme A en B.

a) Déterminer l'expression complexe de T.

b) Montrer que $T(C)=D$.

c) Montrer que $|a-b|=|c-d|$, que peut-on déduire?

d) Montrer que le quadrilatère ABDC est un losange.

Exercice 4

Un sac contient 5 jetons indiscernables au toucher. 2 jetons blancs, 2 jetons verts et un seul jeton rouge.

On tire successivement et avec remise 3 jetons du sac.

1) Soit l'événement :

A : « les trois jetons tirées sont de même couleur »

Montrer que : $p(A)=\frac{17}{125}$.

2) Soit X la variable aléatoire égale au nombre de jetons blancs tirés.

Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

Problème

Soit f la fonction définie sur $[0;1]$ par: $\begin{cases} f(0)=0 \quad ; f(1)=0 \\ f(x)=(\ln x)\times \ln(1-x) \quad ; \text{si } x\in\left]0;1\right[\end{cases}$

On note C sa courbe représentative dans un repère orthonormé (unité graphique 1cm).

On admet que:

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=0$ et $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=0$, ainsi que le résultat suivant pour $\alpha>0$, $\lim\limits_{x\to 0^+} x^\alpha \ln x=0$

Étude de la fonction f

1. a. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1-x)}{x}$

b. En déduire $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$; que peut-on en déduire?

2. Montrer que pour tout $x\in\left]-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right[$, $f\left(\frac{1}{2}-x\right)=f\left(\frac{1}{2}+x\right)$. Que peut-on en conclure pour C?

3. Soit φ la fonction définie sur $]0;1[$ par : $\varphi(x)=(1-x)\ln(1-x)-x\ln x$

a. Déterminer $\varphi'(x)$, puis montrer l'égalité $\varphi''(x)=\dfrac{2x-1}{x(1-x)}$; en déduire les variations de φ' sur $]0;1[$.

b. Montrer que φ' s'annule en deux valeurs α_1 et α_2 sur $]0;1[$ (on ne cherchera pas à calculer ces valeurs).

Donner le signe de φ' sur $]0;1[$.

c. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0^+}\varphi(x)=0$ et $\lim\limits_{x\to 1^-}\varphi(x)=0$

d. Calculer $\varphi\left(\dfrac{1}{2}\right)$. En déduire le signe de $\varphi(x)$ sur $]0;1[$

4. a. Montrer que $f'(x)$ a même signe que $\varphi(x)$ sur $]0;1[$

b. Dresser le tableau de variations de f.

c. Montrer que pour tout x de $]0;1[$ les inégalités suivantes sont vraies:

$0<(\ln x)\times\ln(1-x)\leq(\ln 2)^2$

d. Tracer C.