Exercice n°1.

1) Développer l'expression : $A(x)=(x-1)(x+1)(x-2)$

2) Résoudre les équations suivantes :

(a): $\ln(x^3+2)=\ln(2x^2+x)$ $\quad$ (b): $\ln(|x|^3+2)=\ln(2x^2+|x|)$

(c): $\ln(x^3-x^2-3x+3)=\ln(x^2-2x+1)$ $\quad$ (d): $\ln(x^3-x^2-3x+3)=2\ln(x-1)$.

Correction Exercice n°1.

1) $A(x)=(x-1)(x+1)(x-2)$

$=(x^2-1)(x-2)=x^3-2x^2-x+2$

2) Résoudre les équations suivantes :

- $\boxed{(a): \ln(x^3+2)=\ln(2x^2+x)}$ *Examinons d'abord l'ensemble de définition de l'équation*

L'équation est bien définie si et seulement si

$$\begin{cases} x^3+2>0 \\ 2x^2+x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3>-2 \\ x(2x+1)>0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>-\sqrt[3]{2} \\ x\in\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right[\cup\left]0;+\infty\right[\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x\in\left]-\sqrt[3]{2};-\frac{1}{2}\right[\cup\left]0;+\infty\right[$$

$$D_{ét}=\left]-\sqrt[3]{2};-\frac{1}{2}\right[\cup\left]0;+\infty\right[$$

(a): $\Leftrightarrow x^3+2=2x^2+x \Leftrightarrow x^3+2-2x^2-x=0$

$\Leftrightarrow x^3-2x^2-x+2=0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x+1)(x-2)=0$

$\Leftrightarrow x=1$ *ou* $x=-1$ *ou* $x=2$

$1;-1$ *et* $2\in\left]-\sqrt[3]{2};-\frac{1}{2}\right[\cup\left]0;+\infty\right[$ $\qquad$ *alors* $\boxed{S=\{-1;1;2\}}$

- $\boxed{(b): \ln(|x|^3+2)=\ln(2x^2+|x|)}$

L'équation est bien définie sur IR car pour tout x dans IR $|x|^3+2>0$ *et* $2x^2+|x|>0$ *; On pose :*

$X=|x|$ *on obtient :*

(b): $\ln(|x|^3+2)=\ln(2x^2+|x|)$

$\Leftrightarrow \ln(X^3+2)=\ln(2X^2+X)$

$\Leftrightarrow X^3+2=2X^2+X$

$\Leftrightarrow X^3-2X^2-X+2=0$

D'après la question précédente on a : $X=\pm1$ *et* $X=2$ *or* $X=|x|\geq 0$ *d'où :*

$\boxed{S=\{-2;-1;1;2\}}$

■ $\boxed{(c):\ \ln\left(x^3-x^2-3x+3\right)=\ln\left(x^2-2x+1\right)}$

Examinons d'abord l'ensemble de définition de l'équation

Pour cela on pose : $f(x)=x^3-x^2-3x+3$ *et* $g(x)=x^2-2x+1$ *on peut facilement factoriser f en remarquant que :* $f(1)=0$ *d'où :* $f(x)=(x-1)\left(x+\sqrt{3}\right)\left(x-\sqrt{3}\right)$ *et on obtient le tableau de signe de f :*

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$(x+\sqrt{3})$		-	0		+				
$(x-1)$			-		0		+		
$(x-\sqrt{3})$				-			0	+	
$f(x)$		-	0	+	0	-	0	+	

Et $g(x)=x^2-2x+1=(x-1)^2$ *on a :* $g(x)>0$ *pour* $x\in\left]-\infty;1\right[\cup\left]1;+\infty\right[$

Donc $D_{ét}=\left(\left]-\sqrt{3};1\right[\cup\left]\sqrt{3};+\infty\right[\right)\cap\left(\left]-\infty;1\right[\cup\left]1;+\infty\right[\right)$

$=\left]-\sqrt{3};1\right[\cup\left]\sqrt{3};+\infty\right[$

$(c):\ \ln\left(x^3-x^2-3x+3\right)=\ln\left(x^2-2x+1\right)$

$\Leftrightarrow x^3-x^2-3x+3=x^2-2x+1$

$\Leftrightarrow x^3-2x^2-x+2=0$

D'après ce qui précède $x=-1$; $x=1$ *ou* $x=2$ *or* $1\notin\left]-\sqrt{3};1\right[\cup\left]\sqrt{3};+\infty\right[$ *donc :*

$\boxed{S=\{-1;2\}}$

■ $\boxed{(d):\ \ln\left(x^3-x^2-3x+3\right)=2\ln(x-1)}$

Comme précédemment on obtient : $D_{ét}=\left]-\sqrt{3};1\right[$

$(d):\ \ln\left(x^3-x^2-3x+3\right)=2\ln(x-1)$

$\Leftrightarrow \ln\left(x^3-x^2-3x+3\right)=\ln(x-1)^2$

$\Leftrightarrow x^3-x^2-3x+3=x^2-2x+1$

$\Leftrightarrow x^3-2x^2-x+2=0$

D'après ce qui précède $x=-1$; $x=1$ *ou* $x=2$ *or* $1\notin\left]-\sqrt{3};1\right[$ *et* $2\notin\left]-\sqrt{3};1\right[$

donc : $\boxed{S=\{-1\}}$

Exercice n°2.

Résoudre le système d'équations suivant :

1) $\begin{cases} x-y=\dfrac{3}{2} \\ \ln x+\ln y=0 \end{cases}$ *2)* $\begin{cases} 5\ln x+2\ln y=26 \\ 2\ln x-3\ln y=-1 \end{cases}$ *3)* $\begin{cases} \ln xy=5 \\ (\ln x)(\ln y)=-12 \end{cases}$

Correction Exercice n°2.

1) $\boxed{\begin{cases} x-y=\dfrac{3}{2} \\ \ln x+\ln y=0 \end{cases}}$ *x et y sont solution du système 1) ssi* $x>0$ *et* $y>0$; *et on résout le système par substitution*

$$\begin{cases} x-y=\dfrac{3}{2} & L_1 \\ \ln x+\ln y=0 & L_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=x-\dfrac{3}{2} & L_1 \\ \ln x+\ln\left(x-\dfrac{3}{2}\right)=0 & L_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=x-\dfrac{3}{2} & L_1 \\ \ln\left[x\left(x-\dfrac{3}{2}\right)\right]=\ln 1 & L_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=x-\dfrac{3}{2} & L_1 \\ x^2-\dfrac{3}{2}x-1=0 & L_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=x-\dfrac{3}{2} & L_1 \\ x^2-\dfrac{3}{2}x-1=0 & L_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=x-\dfrac{3}{2} & L_1 \\ x=-\dfrac{1}{2} \quad ou \quad x=2 & L_2 \end{cases}$$

Or $x>0$ *Donc :* $\boxed{S=\left\{\left(2;\dfrac{1}{2}\right)\right\}}$

2) $\boxed{\begin{cases} 5\ln x+2\ln y=26 \\ 2\ln x-3\ln y=-1 \end{cases}}$ *x et y sont solution du système 2) ssi* $x>0$ *et* $y>0$

On pose par changements de variables $X=\ln x$ *et* $Y=\ln y$ *on obtient :*

$\begin{cases} 5\ln x+2\ln y=26 \\ 2\ln x-3\ln y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5X+2Y=26 \\ 2X-3Y=-1 \end{cases}$ *comme le discriminant de ce système est différent de 0 :alors le système admet une unique solution* $X=4 \Leftrightarrow \ln x=4 \Leftrightarrow x=e^4$ *et*
$Y=3 \Leftrightarrow \ln y=3 \Leftrightarrow y=e^3$

Donc : $\boxed{S=\left\{\left(e^4;e^3\right)\right\}}$

3) $\boxed{\begin{cases} \ln xy=5 \\ (\ln x)(\ln y)=-12 \end{cases}}$ *x et y sont solution du système 3) ssi* $x>0$ *et* $y>0$

$\ln xy=\ln x+\ln y$

On pose par changements de variables $X=\ln x$ *et* $Y=\ln y$ *on obtient :*

$$\begin{cases}\ln xy = 5\\ (\ln x)(\ln y) = -12\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\ln x + \ln y = 5\\ (\ln x)(\ln y) = -12\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}X + Y = 5\\ XY = -12\end{cases}$$

Donc X *et* Y *sont solution de l'équation :* $X^2 - 4X - 12 = 0$ *d'où :* $X_1 = -2$ *et* $X_2 = 6$

Et comme X *et* Y *jouent des rôles symétriques alors les solutions sont :* $(-2;6)$ *ou* $(6;-2)$ *d'où :*

$x = e^{-2}$ *et* $y = e^{6}$ *ou* $x = e^{6}$ *et* $y = e^{-2}$ *donc :* $\boxed{S = \{(e^{-2};e^{6}),(e^{6};e^{-2})\}}$

Exercice n°3.

Précisez l'ensemble de définition puis résoudre les inéquations suivantes :

1) $\ln(2+5x) \le \ln(x+6)$ *2)* $\ln(x-1) + \ln(x-3) < \ln 3$ *3)* $\ln x > 2$

4) $\dfrac{2(1+\ln x)}{x} > 0$ *5)* $(\ln x)^2 + \ln x - 6 \le 0$ *6)* $\ln(2x-5) \ge 1$

7) $(1,2)^n \ge 4 \quad (n \in IN)$ *8)* $(0,8)^n \ge 0,1 \quad (n \in IN)$

Correction Exercice n°3.

1) $\boxed{\ln(2+5x) \le \ln(x+6)}$

$$x \in D_{Et} \Leftrightarrow \begin{cases}2 + 5x > 0\\ x + 6 > 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x > -\dfrac{2}{5}\\ x > -6\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x \in \left]-\frac{2}{5};+\infty\right[\cap \left]-6;+\infty\right[$$

Donc : $D_{Et} = \left]-\dfrac{2}{5};+\infty\right[$

$$\ln(2+5x) \le \ln(x+6) \Leftrightarrow 2+5x \le x+6$$

$$\Leftrightarrow x \le 1$$

$$S = \left]-\frac{2}{5};+\infty\right[\cap \left]-\infty;1\right[$$

Donc : $\boxed{S = \left]-\dfrac{2}{5};1\right[}$

2) $\boxed{\ln(x-1) + \ln(x-3) < \ln 3}$

$$x \in D_{Et} \Leftrightarrow \begin{cases}x - 1 > 0\\ x - 3 > 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x > 1\\ x > 3\end{cases}$$

Donc : $D_{Et} =]3;+\infty[$

$$\Leftrightarrow x \in]1;+\infty[\cap]3;+\infty[$$

$$\ln(x-1) + \ln(x-3) < \ln 3 \Leftrightarrow \ln[(x-3)(x-1)] < \ln 3$$

$$\Leftrightarrow (x-3)(x-1)<3$$
$$\Leftrightarrow x^2-4x+\cancel{3}<\cancel{3}$$
$$\Leftrightarrow x^2-4x<0$$
$$\Leftrightarrow (x-4)x<0$$
$$\Leftrightarrow x\in]0;4[$$

$S=]3;+\infty[\cap]0;4[$ *Donc :* $\boxed{S=]3;4[}$

3) $\boxed{\ln x\geq 2}$

$x\in D_{Et}\Leftrightarrow x>0\Leftrightarrow x\in]0;+\infty[$

Donc : $D_{Et}=]0;+\infty[$

$$\ln x\geq 2\Leftrightarrow \ln x\geq 2\times\ln e$$
$$\Leftrightarrow \ln x\geq \ln e^2$$
$$\Leftrightarrow x\geq e^2$$

Alors : $S=]0;+\infty[\cap[e^2;+\infty[$

D'où : $\boxed{S=[e^2;+\infty[}$.

4) $\boxed{\dfrac{2(1+\ln x)}{x}>0}$

$x\in D_{Et}\Leftrightarrow \begin{cases}x>0\\ x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow x\in]0;+\infty[$

Donc : $D_{Et}=]0;+\infty[$

$$\frac{2(1+\ln x)}{x}>0\Leftrightarrow 1+\ln x>0$$
$$\Leftrightarrow \ln x>-1$$
$$\Leftrightarrow \ln x>-\ln e$$
$$\Leftrightarrow \ln x>\ln\left(\frac{1}{e}\right)\Leftrightarrow x>\frac{1}{e}$$

Donc $S=\left]\frac{1}{e};+\infty\right[\cap]0;+\infty[$

alors : $\boxed{S=\left]\frac{1}{e};+\infty\right[}$.

5) $(\ln x)^2+\ln x-6\leq 0$

$x\in D_{Et}\Leftrightarrow x>0\Leftrightarrow x\in]0;+\infty[$ *Donc :* $D_{Et}=]0;+\infty[$

On pose $X=\ln x$ *on obtient :* $(\ln x)^2+\ln x-6\leq 0\Leftrightarrow X^2+X-6\leq 0$

Que l'on sait résoudre on a comme solutions : $X=2$ *et* $X=-3$

$(\ln x)^2+\ln x-6\leq 0\Leftrightarrow \begin{cases}\ln x\leq 2\\ \ln x\geq -3\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x\leq e^2\\ x\geq e^{-3}\end{cases}$ *Donc :* $\boxed{S=[e^{-3};e^2]}$

6) $\boxed{\ln(2x-5)\geq 1}$

$x\in D_{Et}\Leftrightarrow 2x-5>0\Leftrightarrow x>\frac{5}{2}\Leftrightarrow x\in\left]\frac{5}{2};+\infty\right[$ *Donc :* $D_{Et}=\left]\frac{5}{2};+\infty\right[$

$$\ln(2x-5)\geq 1 \Leftrightarrow \ln(2x-5)\geq \ln e$$
$$\Leftrightarrow 2x-5\geq e$$
$$\Leftrightarrow x\geq \frac{e+5}{2}$$

Donc $S=\left[\frac{e+5}{2};+\infty\right[\cap\left]\frac{5}{2};+\infty\right[$

alors : $\boxed{S=\left[\frac{e+5}{2};+\infty\right[}$

7) $\boxed{(1,2)^n\geq 4 \quad (n\in IN)}$ $\quad (1,2)^n\geq 4 \Leftrightarrow \ln(1,2)^n\geq \ln 4$

(La fonction $\ln$ *est continue strictement croissante sur* $]0;+\infty[$ *)*

$$\Leftrightarrow n\ln(1,2)\geq \ln 4$$
$$\Leftrightarrow n\geq \frac{\ln 4}{\ln(1,2)}\simeq 7.61 \qquad (Car\ \ln(1,2)\ est\ positif)$$

Alors : $\boxed{n\geq 8}$

8) $\boxed{(0,8)^n\leq 0,1 \quad (n\in IN)}$

$$(0,8)^n\leq 0,1 \Leftrightarrow \ln(0,8)^n\leq \ln(0,1)$$

(La fonction $\ln$ *est continue strictement croissante sur* $]0;+\infty[$ *)*

$$\Leftrightarrow n\ln(0,8)\leq \ln(0,1)$$
$$\Leftrightarrow n\geq \frac{\ln(0,1)}{\ln(0,8)}\simeq 10.31 \quad (Car\ \ln(0,8)\ est\ négatif)$$

Alors : $\boxed{n\geq 11}$