Série d'exercices -Nombres complexes – 2éme Bac S.M

Exercice 1

Prérequis :
pour tous nombres complexes $z \neq 0$ et $z' \neq 0$, $|zz'| = |z||z'|$ et $arg(zz') \equiv arg(z) + arg(z')[2\pi]$.

1- Démontrer par récurrence que, pour tout nombre complexe $z \neq 0$ et pour tout entier naturel n, $|z^n| = |z|^n$ et $arg(z^n) \equiv n \times arg(z)[2\pi]$.

2- a) Déterminer le module et un argument de $z = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$.

b) En déduire une forme trigonométrique de z^{40}.

Exercice 2

En posant $Z = \frac{z'}{z}$ et en écrivant $Zz = z'$, démontrer que, pour tous nombres complexes $z \neq 0$ et $z' \neq 0$,

$\left|\frac{z'}{z}\right| = \frac{|z'|}{|z|}$ et $arg\left(\frac{z'}{z}\right) \equiv arg(z') - arg(z)[2\pi]$

2. On donne : $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}\right)$ et $z' = 5\left(\cos\frac{\pi}{7} + i\sin\frac{\pi}{7}\right)$.

En déduire une forme trigonométrique de $\frac{z'}{z}$ et de $\frac{z}{z'}$.

Exercice 3 Vrai ou faux

a. Si $z = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$, alors z^4 est un nombre réel.

b. Si $z + \overline{z} = 0$, alors $z = 0$.

c. Si $z + \frac{1}{z} = 0$, alors $z = i$ ou $z = -i$.

d. Si $|z| = 1$ et si $|z + z'| = 1$, alors $z' = 0$.

Exercice 4 QCM

Pour chaque question, au moins une des quatre réponses proposées est exacte.
On désigne par A, B, C et D les points d'affixes respectives $z_A = 1$, $z_B = i$, $z_C = -1$ et $z_D = -i$.

1. L'ensemble des points d'affixe z tel que $|z+i| = |z-1|$ est :

a. la médiatrice du segment $[BC]$
b. le milieu du segment $[BC]$
c. le cercle de centre O et de rayon 1
d. la médiatrice du segment $[AD]$

2. L'ensemble des points d'affixe z tel que $\frac{z+i}{z+1}$ soit un imaginaire pur est :

a. la droite (CD) privée du point C
b. le cercle de diamètre $[CD]$ privé du point C
c. le cercle de diamètre $[BD]$ privé du point C
d. la médiatrice du segment $[AB]$

3. L'ensemble des points d'affixe z tels que $arg(z-i) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$ est :

a. le demi-cercle de diamètre $[BD]$ passant par A
b. la droite (BD)
c. la demi-droite $]BD)$ d'origine B passant par D privée de B
d. le cercle de diamètre $[BD]$ privé de B et D

Exercice 5

On pose : $j=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

a) Calculer j^2 , j^3 puis j^n suivant les valeurs de l'entier naturel n.

b) Vérifier que $1+j+j^2=0$.

c) Calculer la somme $S'=1+j+j^2+\cdots+j^{2019}+j^{2020}$.

Exercice 6

On considère le polynôme P défini par : $P(z)=z^4-6z^3+24z^2-18z+63$.

1. Calculer $P(i\sqrt{3})$ et $P(-i\sqrt{3})$, puis trouver un polynôme Q du second degré à coefficients réels tel que, pour tout $z\in\mathbb{C}$, on ait $P(z)=(z^2+3)Q(z)$.

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z)=0$.

3. Placer dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$ les points A, B, C et D d'affixes respectives
$z_A=i\sqrt{3}$, $z_B=-i\sqrt{3}$, $z_C=3+2i\sqrt{3}$ et $z_D=\overline{z}_C$, puis montrer que ces quatre points appartiennent à un même cercle.

4. On note E le symétrique de D par rapport à O.
Conjecturer la nature du triangle BEC, puis démontrer votre conjecture.

Exercice 7

Soit P le polynôme défini par $P(z)=z^3+2(1-i)z^2+(1-4i)z-2i$.

a. Trouver le réel α tel que : $P(i\alpha)=0$.

b. Trouver les nombres complexes p et q tels que : $P(z)=(z-i\alpha)(z^2+pz+q)$.

c. En déduire les solutions de l'équation $P(z)=0$.

Exercice 8

Le plan est rapporté au repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$.

A tout point M d'affixe z du plan, on associe le point M′ d'affixe z' tel que : $z'=\frac{(3+4i)z+5\overline{z}}{6}$. On définit la fonction f par $f(M)=M'$.

1. On considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A=1+2i$, $z_B=1$ et $z_C=3i$.
Déterminer les affixes des points A', B' et C' images respectives de A, B et C par f.
Placer les points A, B, C, A', B' et C'.
2. On pose $z=x+iy$, avec x et y réels.
Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de z en fonction de x et y.

3. Montrer que l'ensemble des points M invariants par f est la droite D d'équation $y=\frac{1}{2}x$.

Tracer D.

Que remarque-t-on ? (Indication : un point invariant par f, ou point fixe, est un point M tel que $f(M)=M$)

4. Soit M un point quelconque du plan et M′ son image par f.
Montrer que : M′ appartient à la droite D.

Exercice 9

1. a. Démontrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$: $(1-z)\left(1+z+z^2+\cdots+z^{n-1}\right)=1-z^n$.

   b. En déduire que $z^n=1$ si, et seulement si, $z=1$ ou $1+z+z^2+\cdots+z^{n-1}=0$.

2. On pose $\omega = e^{2i\frac{\pi}{5}}$.
   a. Vérifier que $\omega^5=1$, puis que $\omega^4=\omega$ et $\omega^3=\omega^2$.
   b. On pose $u=\omega+\omega^4$ et $v=\omega^2+\omega^3$. Montrer que $u+v=uv=-1$.
   c. Déterminer une équation du second degré dont u et v sont les deux solutions.
   d. En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{2\pi}{5}$ et $\cos\frac{4\pi}{5}$.

3. Soit A_k le point d'affixe ω^k pour k entier naturel.
   a. Montrer que $A_k = A_{k+5}$. Quelles sont les coordonnées de A_1 ?
   b. Pour tout k , calculer OA_k , puis A_kA_{k+1} .
   On dit alors que le pentagone $A_0A_1A_2A_3A_4$ est un pentagone régulier