EXERCICE N°1 *(12 pts)*

I) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ *,on pose :* $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}dx$ *et* $I_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$

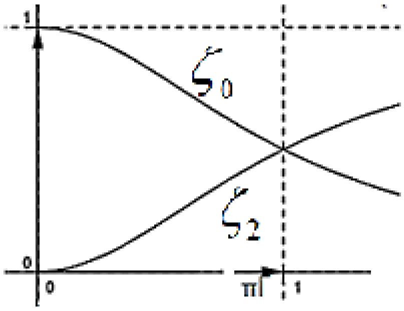
a-Etudier la monotonie de la suite (I_n).

b-Montrer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, *on a :* $0 \le I_n \le \frac{1}{n+1}$.

c-Déduire que (I_n) *converge vers une limite que l'on précisera.*

II) Soit f_0 *et* f_2 *les fonctions définies sur* $[0;+\infty[$ *par :* $f_0 = \frac{1}{1+x^2}$ *et* $f_2 = \frac{x^2}{1+x^2}$

dont on a tracé les courbes représentatives respectives ζ_0 *et* ζ_2 *dans un repère orthonormé* $(O;\vec{i};\vec{j})$.



On pose pour tout $x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ *;* $F(x) = \int_0^{\tan x} \frac{1}{1+t^2}dt$

1) *a- Montrer que F est dérivable sur* $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ *et calculer* $F'(x)$ *pour tout* $x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right[$.

b- Montrer que pour tout $x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ *; on a :* $F(x) = x$

c- Déduire que : $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{4}$

d- Vérifier que pour tout réel x on a : $\frac{x^2}{1+x^2} = 1 - \frac{1}{1+x^2}$

e- Déduire la valeur de l'intégrale : $\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}dx$

f- Calculer alors l'aire A de la partie du plan limitée par les courbes ζ_0 *et* ζ_2 *et les droites d'équations :* $x = 0$ *et* $x = 1$.

2) *A l'aide d'une intégration par partie calculer la valeur du volume V généré pat la rotation de l'arc* $OA = \{M(x;y) / y = f_2(x) \text{ et } 0 \le x \le 1\}$ *de* ζ_2 *autour de l'axe des abscisses.*