BAC BLANC **2BAC SM** **2014-2015**

Exercice (1)

1) Résoudre dans c l'équation $z^2-(5-7i)z-6-13i=0$

2) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$

On considère les points A , B et C d'affixes respectivement $a=1-2i$; $b=4-5i$ et $c=4+i$.

a) calculer $\dfrac{b-a}{c-a}$; puis déduire la nature du triangle ABC

b) déterminer l'affixe d du point D pour que ABDC soit un carré

3) soit R la rotation de centre A et qui transforme le point B en C

a) vérifier que $\dfrac{\pi}{2}$ est une mesure de l'angle de R et que l'expression complexe de R s'écrit $z'=iz-1-3i$

b) soit M' l'image de M par la rotation R montrer que $(CM')\perp(BM)$

Exercice (2)

Partie A

On rappelle que $(\mathcal{M}_2;(R);+;\times)$ est un anneau unitaire et $(\mathcal{M};(R);+;\cdot)$ un espace vectoriel réel.

On considère l'ensemble $E=\left\{M(x;y)=\begin{pmatrix} x+y & y \\ 0 & x+y \end{pmatrix} / (x;y)\in \mathbb{R}^2\right\}$ et on pose

$J=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

1) a) Montrer que $(E;+)$ est un groupe commutatif

b) Montrer que $(E;+;\cdot)$ est un espace vectoriel et déterminer sa dimension

2) a) Vérifier que : $J^2=-I+2J$ et déduire que E est stable dans $(\mathcal{M};(R;\times))$

b) Montrer que $(E;+;\times)$ est un anneau unitaire . "$\cdot$" est-il commutatif ?

Partie B

Dans l'anneau unitaire $(\mathcal{M}_3;(R);+;\times)$ on considère $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

1) a) Calculer A et vérifier que $A^2+2A+I=0$. 0 est la matrice nulle.

b) Déduire que A admet un inverse que l'on déterminera

2) Montrer que : $(\forall n\geq 2)$; $A^n=(-1)^{n-1}(n.A+(n-1)I)$ (I la matrice unitaire).

Exercice (3)

Soient p un nombre premier tel que $p \geq 3$ *et* $(n;a)$ *un couple de* $\mathbb{N}^* \times \mathbb{Z}$

1) *Montrer que :* $\left(a \equiv 1 \left[p^n \right] \text{ ou } a \equiv -1 \left[p^n \right] \right) \Rightarrow \left(a^2 \equiv 1 \left[p^n \right] \right)$

2) *On suppose* $a^2 \equiv 1 \left[p^n \right]$

a) *Montrer que* $p \mid a-1$ *ou* $p \mid a+1$

b) *Montrer que si* $p \mid a-1$ *alors* $(a+1) \wedge p = 1$

c) *Déduire que* $a \equiv 1 \left[p^n \right]$ *ou* $a \equiv -1 \left[p^n \right]$

3) *Résoudre dan* $\mathbb{N}^*$ *l'équation* $\overline{121}^{(x)} \equiv 1 \, [125]$.

Exercice(4)

Partie(A)

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{e^x + 1}$

1) *Etudier les branches infinies de la courbe* (C_f).

2) *Calculer* $f'(x)$ *et étudier le sens de variation de f puis donner le tableau de variations*

3) *Tracer la courbe* (C_f) *dans un repère orthonormé* $(O;\vec{i};\vec{j})$.

4) a) *Montrer que f est une bijection de* $\mathbb{R}$ *vers* $\mathbb{R}_+^*$

b) *Tracer dans le repère précédant la courbe de la réciproque* f^{-1}.

c) *Déterminer* $f^{-1}(x)$ *pour tout x de* $\mathbb{R}_+^*$

5) *Soient* λ *réel de* $\mathbb{R}_+^*$ *et* S_λ *l'air du domaine limité par* (C_f) *les axes du repère et la droite d'équation* $x = \lambda$ *Calculer* S_λ *et déterminer* $\lim\limits_{\lambda \to -\infty} S_\lambda$.

Partie (B)

Pour tout entier naturel n non nul et pour tout x de $\mathbb{R}^-$ *on pose :* $F_n(x) = \displaystyle\int_x^0 \frac{e^{nt}}{e^t + 1} dt$

1) a) *Calculer* $F_1(x)$ *et déduire que* $\lim\limits_{x \to -\infty} F_1(x) = \ln 2$

b) *Déterminer* $\lim\limits_{x \to -\infty} F_2(x)$

2) a) *Montrer que :* $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $F_{n+1}(x) + F_n(x) = \dfrac{1}{n}\left(1 - e^{nx}\right)$

b) *Montrer par récurrence que* F_n *admet une limite finie en* $-\infty$. *On pose* $R_n = \lim\limits_{x \to -\infty} F_n(x)$

3) a) *Montrer que :* $(\forall t \leq 0)$; $2e^t \leq 1 + e^t \leq 2$

b) *Montrer que :* $(\forall n \geq 2)$; $(\forall x \in \mathbb{R}^-)$; $\dfrac{1}{2n}\left(1 - e^{nx}\right) \leq F_n(x) \leq \dfrac{1}{2(n-1)}\left(1 - e^{(n-1)x}\right)$

c) déduire un encadrement de R_n *.*

4) on pose $G_n(x)=(-1)^n\int_x^0 e^{nt}dt$ *pour tout « de R*

a) calculer $G_n(x)$ *et montrer que :* $\lim_{x\to-\infty} G_n(x)=\dfrac{(-1)^n}{n}$

b) montrer que : $(\forall n\geq 2)$ *;* $\sum_{k=1}^{n} G_k(x)=-F_1(x)+(-1)^n F_{n+1}(x)$

5) soit (u_n) *la suite définie par :* $u_n=\sum_{k=1}^{n}\dfrac{(-1)^k}{k}$

a) montrer que : $u_n=\ln 2+(-1)^{n+1}R_{n+1}$

b) montrer que (u_n) *est convergente en déterminant sa limite*