Guessmaths

Exercices et sujets de maths corrigés

Etude de fonction (Exercices corrigés)

Exercice 1 :

Soit f la fonction définie sur $IR-\{1\}$ *par :* $f(x)=x-\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2(x-1)^2}$ *et (C) sa courbe dans un repère orthonormé* $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1/ Calculer f(0) et f(2).

2/ Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x);\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x);\ \lim\limits_{x\to1^-} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$.

3/ a- Montrer que : $(\forall x\in IR-\{-1\})\ f'(x)=\dfrac{x(x^2-3x+3)}{(x-1)^3}$

b- Etudier les variations de f sur son domaine de définition et dresser son tableau de variation.

c- Déduire le nombre de solutions de l'équation $f(x)=0$.

4/ Donner l'équation de la droite tangente à (C) *au point* $M_0(2,0)$.

5/ Montrer que la droite d'équation $y=x-\dfrac{3}{2}$ *est une asymptote oblique à* (C).

6- Construire dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})(\|\vec{i}\|=1cm)$ *la courbe* (C) *; la tangente au point* M_0 *et l'asymptote oblique d'équation :* $y=x-\dfrac{3}{2}$.

Correction de l'exercice 1 :

$$f(x)=x-\frac{3}{2}-\frac{1}{2(x-1)^2}\quad(\forall x\in IR-\{1\})$$

1/ Calculons f(0) et f(2) :

On a : • $f(0)=-\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}$

$=-2$

• $f(2)=2-\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}$

$=\dfrac{4-3-1}{2}$

$=0$

2/ Calcul des limites :

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{2(x-1)^2}=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\dfrac{3}{2}\right)=+\infty$ *Donc :* $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

On a : $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{2(x-1)^2}=0$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x-\dfrac{3}{2}\right)=-\infty$ *Donc :* $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$

On a : $\lim\limits_{x\to1^+}\left(-\dfrac{1}{2(x-1)^2}\right)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to1^+}\left(x-\dfrac{3}{2}\right)=-\dfrac{1}{2}$ *Donc :* $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=-\infty$

On a : $\lim\limits_{x\to1^-}\left(-\dfrac{1}{2(x-1)^2}\right)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to1^-}\left(x-\dfrac{3}{2}\right)=-\dfrac{1}{2}$ *Donc :* $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=-\infty$

<u>Interprétation géométrique :</u>

La courbe de f admet la droite d'équation $x=1$ *comme asymptote verticale au voisinage de* $-\infty$

3- a- On a : $f(x)=x-\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2(x-1)^2}\ \left(\forall x\in IR-\{1\}\right)$

Donc : $\left(\forall x\in IR-\{1\}\right)\ f'(x)=\left(x-\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2(x-1)^2}\right)$

$$\Rightarrow f'(x)=-\frac{1}{2}\times(-2)\times(x-1)^{-2-1}$$

$$=1+(x-1)^{-3}$$

$$=\frac{(x-1)^3+1}{(x-1)^3}$$

$$=\frac{(x-1)(x-1)^2+1}{(x-1)^3}$$

$$=\frac{x(x-1)^2-(x^2-2x+1)+1}{(x-1)^3}$$

$$= \frac{x(x-1)^2 - x^2 + 2x}{(x-1)^3}$$

$$= \frac{x\left((x-1)^2 - x + 2\right)}{(x-1)^3}$$

$$= \frac{x(x^2 - 2x + 1 - x + 2)}{(x-1)^3}$$

D'où : $f'(x) = \dfrac{x(x^2-3x+3)}{(x-1)^3} \quad (\forall x \in IR - \{1\})$

b- Etudions le signe de f'(x) :

On a : $\forall x \in IR - \{1\} \quad x^2 - 3x + 3 > 0$

Car : $\Delta = 9 - 12 = -3 < 0$ *Donc le signe de f'(x) est celui de* $\dfrac{x}{(x-1)^3}$.

Tableau de signe de f'(x) :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
x		$-$	0		$+$		
$(x-1)^3$			$-$		0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

D'où : f est croissante sur $]-\infty; 0] \cup]1; +\infty]$ *et décroissante sur* $[0,1[$.

Tableau de variation de f :

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$		$+$		
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-e$	$\searrow$	$+\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

c- d'après le tableau de variations ci-dessus on remarque que f s'annule en un seule point $x_0=2$.

4- l'équation de la tangente à (C) *au point* $M_0(2,0)$ *est :*

$$y = f'(2)(x-2) + f(2) \qquad (\text{on a} : f(2) = 0 \text{ et } f'(2) = 2)$$

$\Rightarrow y = 2(x-2)$

$\Rightarrow$ *l'équation de* $\Gamma : y = 2x-4$

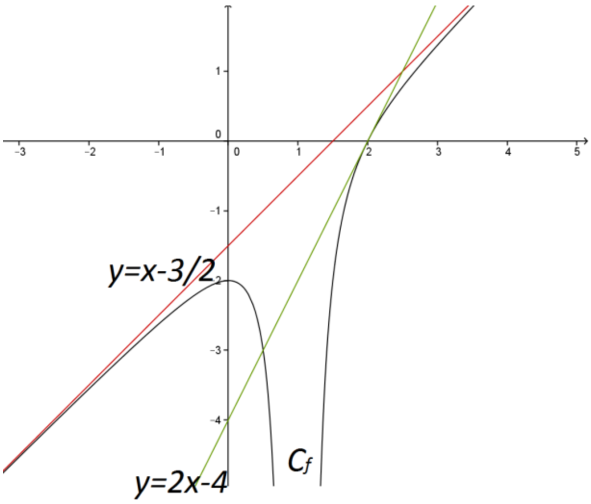
5- *On a :* $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-\left(x-\dfrac{3}{2}\right)\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-\left(x-\dfrac{3}{2}\right)\right)$

$= 0$

$\left(car \ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\dfrac{1}{2(x-1)^2}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{2(x-1)^2}\right) = 0\right)$

D'où la droite d'équation $y = x-\dfrac{3}{2}$ *est une asymptote oblique à* (C) *au voisinage* $\pm\infty$

6- *Construction graphique.*



Exercice 2 :

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{2x^2-1}{x^3} - \sqrt{1+x^2}$ *et soit* (C_f) *sa courbe représentative dans un repère orthonormé* $(o,\vec{i},\vec{j})$.

1- *Déterminer D domaine de définition de f et vérifier que f est impaire.*

2- *Calculer* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ *; puis donner l'interprétation géométrique au résultats détenues.*

3- *Montrer que :* $(\forall x \in D)\ f'(x) = \dfrac{3}{x^4\sqrt{1+x^2}}$.

4- *Construire dans le repère* $(o,\vec{i},\vec{j})$ (C_f).

5- *Soit g la restriction de f sur l'intervalle* $]0,+\infty[$.

a) *Montrer que g admet une fonction réciproque* g^{-1} *définie sur un intervalle J à déterminer.*

b) *Montrer que* g^{-1} *est dérivable sur J.*

c) *Construire la courbe de* g^{-1} *sur le même repère* $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$.

Correction de l'exercice 2 :

$$f(x)=\frac{2x^2-1}{x^3}\sqrt{1+x^2}$$

1/ $\bullet\, x\in D \Leftrightarrow x^3\neq 0$

Puisque $(\forall x\in IR)\Leftrightarrow x\neq 0$ *D'où* $D=\left]-\infty,0\right[\cup\left]0,+\infty\right[$.

Vérifions que f est impaire :

$\bullet$*On a* $\forall x\in\left]-\infty,0\right[\cup\left]0,+\infty\right[$

$\Rightarrow(-x)\in\left]-\infty,0\right[\cup\left]0,+\infty\right[$

Et $f(-x)=\dfrac{2(-x)^2-1}{(-x)^3}\sqrt{1+(-x)^2}$

$=\dfrac{-2x^2-1}{x^3}\sqrt{1+x^2}=-f(x)$ *Donc f est une fonction impaire.*

2/ On a : $\forall x>0\;\; f(x)=\dfrac{2x^2-1}{x^3}\sqrt{x^2\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}$

$$=\frac{2x^2-1}{x^3}x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$$

$$=\frac{x^2\left(2-\frac{1}{x^2}\right)}{x^3}x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$$

$$=\left(2-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$$

D'où $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2-\dfrac{1}{x^2}\right)\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=2\quad\left(\text{car }\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2}=0\right)$

Calculons $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$

On a : $\bullet\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{2x^2-1}{x^3}=-\infty$

$$\lim_{x\to 0^+}\sqrt{1+x^2}=1$$

Donc $\lim_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$

Interprétation géométrique :

- $\lim_{x\to +\infty} f(x)=2$ *: signifie que la courbe admet une asymptote horizontale d'équation* $y=2$ *au voisinage de* $+\infty$.
- $\lim_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$ *: signifie que la courbe admet une asymptote verticale d'équation* $x=0\left(l'axe\ Oy\right)$ *au voisinage de -∞.*

3/ on a : $f(x)=\dfrac{2x^2-1}{x^3}\sqrt{1+x^2}$ *la fonction* $x\to\dfrac{2x^2-1}{x^3}$ *est dérivable sur* IR^*.

Donc la fonction f est dérivable sur D et on a :

$$f'(x)=\left(\frac{2x^2-1}{x^3}\sqrt{1+x^2}\right)' \quad (\forall x\in D)$$

$$\Rightarrow f'(x)=\left(\frac{2x^2-1}{x^3}\right)'\sqrt{1+x^2}+\left(\frac{2x^2-1}{x^3}\right)\left(\sqrt{1+x^2}\right)' \quad (\forall x\in D)$$

On a : $\left(\dfrac{2x^2-1}{x^3}\right)'=\dfrac{4x.x^3-(2x^2-1)\times 3x^2}{x^6}$

$$=\frac{4x^4-6x^4+3x^2}{x^6}$$

$$=\frac{4x^4-6x^4+3x^2}{x^6}$$

$$=\frac{-2x^4+3x^2}{x^6}=\frac{-2x^2+3}{x^4}$$

Et : $\left(\sqrt{1+x^2}\right)'=\dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

D'où : $f'(x)=\dfrac{-2x^2+3}{x^4}\sqrt{1+x^2}+\dfrac{2x^2-1}{x^3}\times\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

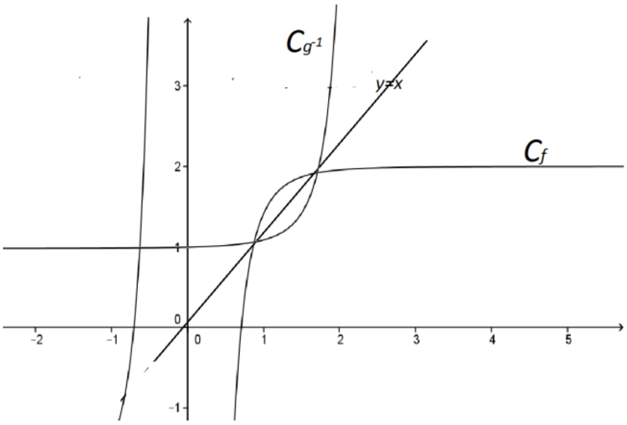
$$=\frac{(-2x^2+3)\left(\sqrt{1+x^2}\right)^2+(2x^2-1)x^2}{x^4\sqrt{1+x^2}}$$

$$=\frac{(-2x^2+3)(1+x^2)+2x^4-x^2}{x^4\sqrt{1+x^2}}$$

$$=\frac{-\cancel{2x^2}+3-\cancel{2x^4}+\cancel{3x^2}+\cancel{2x^4}-\cancel{x^2}}{x^4\sqrt{1+x^2}}=\frac{3}{x^4\sqrt{1+x^2}}$$

Donc : $(\forall x\in D)\ f'(x)=\dfrac{3}{x^4\sqrt{1+x^2}}$

4- Construction de (C_f) *dans le repère* $(o,\vec{i},\vec{j})$.



5- a) g la restriction de f sur $]0,+\infty[$.

Donc g est strictement croissante sur $]0,+\infty[$ *d'où g admet une fonction réciproque* g^{-1} *définie sur l'intervalle.*

$$J=f\left(]0,+\infty[\right)=\left]\lim_{x\to 0^+}f(x);\lim_{x\to+\infty}f(x)\right[=]-\infty;2[$$

b) On a $f'(x)=\dfrac{3}{x^4\sqrt{1+x^2}}$ *sur D donc* $g'(x)=\dfrac{3}{x^4\sqrt{1+x^2}}$ *sur* $]0,+\infty[$.

$$\Rightarrow\left(\forall x\in]0,+\infty[\right)\ g'(x)\neq 0$$

$\Rightarrow g^{-1}$ est dérivable sur J

c) Construction de la courbe de g^{-1} *voir le graphique ci-dessus.*

Exercice 3 :

Soit f *la fonction définie par :* $f(x)=\dfrac{1}{2-\sqrt{x}}$

1- a) Déterminer D_f *le domaine de définition de f.*

b) Etudier la dérivabilité de f au point $x_0=0$ *à droite. Interpréter géométriquement le résultat.*

c) Calculer $\lim\limits_{x\to 4^-}f(x);\lim\limits_{x\to 4^+}f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}$.

2- Montrer que : $\forall x\in]0,+\infty[\ f'(x)=\dfrac{-1}{2\sqrt{x}\left(2-\sqrt{x}\right)}$ *puis dresser le tableau de variation de f*

3- *Soit* (C_f) *la courbe de f dans un repère orthonormé (unité : 2cm).*

a- *Etudier les branches infinies de* (C_f)

b- *Résoudre dans IR l'équation :* $f(x)=x$.

c- *Construire la courbe* (C_f). *(On accepte que le point* $A\left(\frac{4}{9},\frac{3}{4}\right)$ *est un point d'inflexion et que* $\frac{3+\sqrt{5}}{2}\simeq 2,6$*)*

4- *Soit g la restriction de f sur l'intervalle* $I=[0,4[$.

a- *Montrer que g admet une fonction réciproque* g^{-1} *sur un intervalle J à déterminer.*

b- *Donner l'expression de* g^{-1} *pour tout x dans J.*

c- *Construire dans le même repère* $(O,\vec{i},\vec{j})$ *la courbe de la fonction* g^{-1}.

<u>Correction Exercice 3 :</u>

On a : $f(x)=\dfrac{1}{2-\sqrt{x}}$

1/ a- $D_f=\{x\in IR/2-\sqrt{x}\neq 0 \text{ et } x\geq 0\}$

$$\Rightarrow D_f=\{x\in IR/\sqrt{x}\neq 2 \text{ et } x\geq 0\}$$

$$\Rightarrow D_f=\{x\in IR/x\neq 4 \text{ et } x\geq 0\}$$

$$\Rightarrow D_f=[0,4[\cup]4,+\infty[$$

b- Calculons $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{f(x)-f(0)}{x}\right)$

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x}\right)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\frac{1}{2-\sqrt{x}}-\frac{1}{2}}{x}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2-2+\sqrt{x}}{x}\right)=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{2\sqrt{x}\left(2-\sqrt{x}\right)}=+\infty$$

Donc f n'est pas dérivable à droite du point $x_0=0$

<u>Interprétation géométrique :</u>

La courbe de f admet une demi-tangente verticale à droite du point d'abscisse $x_0=0$ *dirigée vers le haut.*

C - $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0; \lim\limits_{x\to4^-} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to4^+} f(x)=-\infty$

2/ On a : $\forall x\in]0,4[\cup]4,+\infty[$

$$f'(x)=\left(\frac{1}{2-\sqrt{x}}\right)'$$

$$=\frac{-\left(2-\sqrt{x}\right)'}{\left(2-\sqrt{x}\right)^2}$$

$$=\frac{-\left(-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{\left(2-\sqrt{x}\right)^2}=\frac{1}{2\sqrt{x}\left(2-\sqrt{x}\right)^2}$$

Donc : $\forall x\in]0,4[\cup]4,+\infty[\ \ f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}\left(2-\sqrt{x}\right)^2}$

D'où $\left(\forall x\in D_f-\{0\}\right)\ f'(x)>0$ *f est croissante sur* $]0,4[\cup]4,+\infty[$

Tableau de variation de f :

x	0		4		$+\infty$
$f'(x)$	||	+	||	+	
$f(x)$	1/2	↗	$+\infty$ || $-\infty$	↗	0

3/ a- On a : $\lim\limits_{x\to4} f(x)=\infty$ *donc la droite d'équation x=4 est une asymptote verticale à la courbe* $\left(C_f\right)$ *au voisinage de* $+\infty$.

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ *donc la droite d'équation y=0 (c.à.d l'axe des abscisses) est une asymptote horizontale à* $\left(C_f\right)$ *au voisinage de* $+\infty$.

b- Soit l'équation $f(x)=x$ *alors :*

$$\left(x\in IR/\ f(x)=x\right)\Leftrightarrow\left(x\in D_f\right)\frac{1}{2-\sqrt{x}}=x$$

$$\Leftrightarrow 2x-x\sqrt{x}=1\ \left(x\in D_f\right)$$

$\Leftrightarrow 2x - x\sqrt{x} - 1 = 0 \ \left(x \in D_f\right)$

$\Leftrightarrow x\sqrt{x} - 2x + 1 = 0 \ \left(x \in D_f\right)$

$\Leftrightarrow x\sqrt{x} - x + 1 - x = 0 \ \left(x \in D_f\right)$

$\Leftrightarrow x\left(\sqrt{x} - 1\right) + \left(1 - \sqrt{x}\right)\left(1 + \sqrt{x}\right) = 0 \ \left(x \in D_f\right)$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x} - 1\right)\left(x - 1 - \sqrt{x}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x} - 1\right)\left(x - \sqrt{x} - 1\right) = 0$

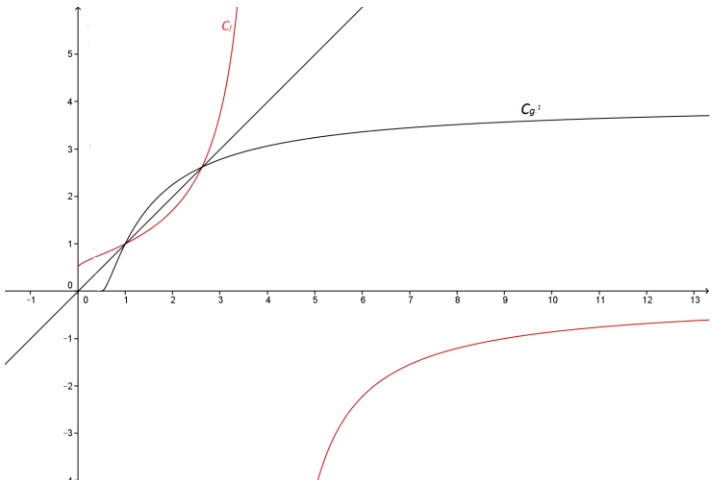
$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = 1 \\ x - \sqrt{x} - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = 1 \\ \sqrt{x} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$

$\left(\text{car } \Delta = 5 \text{ pour l'équation } t^2 - t - 1 = 0 \text{ on pose } \sqrt{x} = t \text{ et } \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} < 0\right)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$

Donc : $S = \left\{1; \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right\}$

c- Construction de $\left(C_f\right)$



4/ g la restriction de f sur $I = [0, 4[$

a- la fonction g est continue strictement croissante sur I donc elle admet une fonction réciproque définie sur un intervalle :

$$J = f(I) = \left[f(0); \lim_{x\to 4^-} f(x) \right[$$

$$= \left[\frac{1}{2}; +\infty \right[$$

$$J = \left[\frac{1}{2}; +\infty \right[$$

b- On a :

$$\begin{cases} g^{-1}(x) = y \\ x \in J \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = g(y) \\ x \in J \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\sqrt{y} = 2x - 1 \\ x \in J \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - x\sqrt{y} = 1 \\ x \in J \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \left(\frac{2x-1}{} \right) \\ x \in J \end{cases}$$

D'où : $\forall x \in \left[\frac{1}{2}, +\infty \right[\quad g^{-1} = \left(\frac{2x-1}{x} \right)$

Exercice 4 :

On considère la fonction f définie sur $\left]-1,+\infty\right[$ *par :* $f(x)=\dfrac{x+2}{\sqrt{x+1}}-2$ *et* (C) *sa courbe représentative dans un repère orthonormé* $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1/ a- Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to-1+} f(x)$

b- Etudier les branches infinis de (C)

2/ a- Montrer que :

$$\left(\forall x\in\left]-1,+\infty\right[\right)\ f'(x)=\frac{x}{2(x+1)\sqrt{x+1}}$$

b- Etudier le signe de $f'(x)$ *; puis dresser le tableau de variation de f.*

3/ Construire (C) *dans le repère orthonormé* $(O,\vec{i},\vec{j})$ *(on accepte que* (C) *admet un point d'inflexion d'abscisse 2).*

4/ Soit g la restriction de f sur $\left]0,+\infty\right[$.

a- Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} *définie sur un intervalle J à déterminer.*

b- Construire la courbe de g^{-1} *dans le même repère* $(O,\vec{i},\vec{j})$.

c- Calculer $g'\left(\dfrac{1}{2}\right)$ *et* $g^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

Correction exercice :

$$f(x)=\frac{x+2}{\sqrt{x+1}}-2\quad \left(\forall x\in\left]-1,+\infty\right[\right)$$

1/ a- Calculons $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)$

On a : $\lim\limits_{x\to-1^+}\sqrt{x+1}=0^+$

Donc : $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=+\infty$

Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

On a :
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+2}{\sqrt{x+1}}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{(x+2)^2}{x+1}}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x^2}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

b- On a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+2}{\sqrt{x+1}}-2\right)\times\frac{1}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+2}{x\sqrt{x+1}}-\frac{2}{x}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1+\frac{2}{x}}{\sqrt{1+x}}-\frac{2}{x}\right) = 0$$

<u>*Interprétation géométrique*</u> *: (Branches infinis)*

On a :

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ *:* (C) *admet la droite d'équation* $x=-1$ *comme asymptote verticale au voisinage de* $+\infty$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$ *:* (C) *admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de* $+\infty$.

2/ a- Calculons $f'(x)$

On a : $\forall x \in \left]-1,+\infty\right[\quad f'(x) = \left(\dfrac{x+2}{\sqrt{x+1}}-2\right)'$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{\sqrt{x+1}-(x+2)\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}}{x+1}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{2(x+1)-(x+2)}{2(x+1)\sqrt{x+1}}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{2x\cancel{+2}\cancel{-x}\cancel{-2}}{2(x+1)\sqrt{x+1}}$$

Donc : $f'(x) = \dfrac{x}{2(x+1)\sqrt{x+1}} \quad \forall x \in \left]-1,+\infty\right[$

b- Etudions le signe de $f'(x)$ *:*

On a : $f'(x) = \dfrac{x}{2(x+1)\sqrt{x+1}} \quad \forall x \in \left]-1,+\infty\right[$

On a : $\begin{cases} x+1>0 \\ \sqrt{x+1}>0 \end{cases}$

Donc $f'(x)$ *est du même signe que* x

D'où :

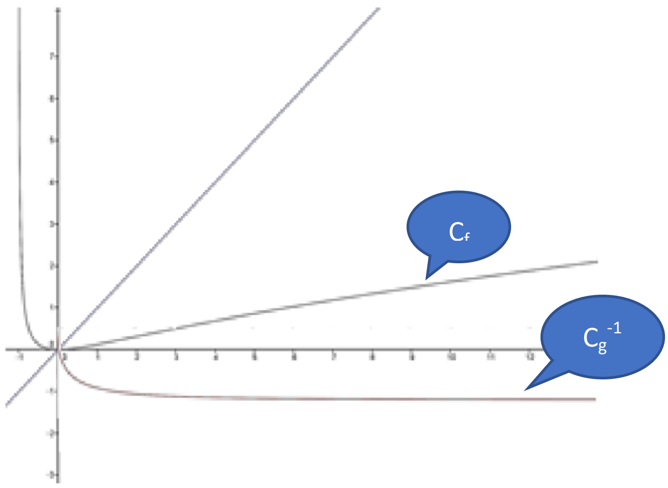
Tableau de signe de $f'(x)$ *:*

x	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+

Tableau de variation de $f(x)$

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f(0)=0$	↗	$+\infty$

3/ Construction de (C) *:*



4/ g la restriction de f sur $[0,+\infty[$

a- *g est continue strictement croissante donc elle admet une fonction réciproque* g^{-1} *définie sur l'intervalle*

$$J = f\left([0,+\infty[\right) = \left[0, \lim_{x\to+\infty} f(x)\right[$$

$$=[0,+\infty[$$

b- *La courbe de* g^{-1} *est symétrique à la portion de* (C_f) *sur* $[0,+\infty[$ *par rapport à l'axe y=x.*

c- Calculons $g^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$

Soit $\begin{cases} \alpha = g^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \\ \alpha > 0 \end{cases}$

$$g(\alpha) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\alpha+2}{\sqrt{\alpha+1}} - 2 = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\alpha+2}{\sqrt{\alpha+1}} = \frac{5}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\alpha + 4 = 5\sqrt{\alpha+1}$$
$$\Leftrightarrow 4\alpha^2 - 9\alpha - 9 = 0$$

$$\Delta = 225 = 15^2 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \frac{9-15}{8} = -\frac{3}{4} \textit{ non valable} \\ \alpha_2 = \frac{9+15}{8} = 3 \end{cases}$$

D'ou $g^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 3$

Et on a : $\left(g^{-1}\right)'\left(\frac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{g'\left(g^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right)}$

$$= \frac{1}{g'(3)} = \frac{1}{f'(3)}$$
$$= \frac{2(3+1)\sqrt{3+1}}{3} = \frac{16}{3}$$

Donc : $\left(g^{-1}\right)'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{16}{3}$

Exercice 5 :

On considère la fonction f définie sur IR par $f(x)=\dfrac{2\sqrt{x}+2x}{1+3x}$ *et* (C) *sa courbe dans un repère orthonormé* $(O,\vec{i},\vec{j})$

1/ Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ *et donner une interprétation géométrique au résultat.*

2/ Etudier la dérivabilité de f à droite de 0.

3/ a- Montrer que $(\forall x\in\left]0,+\infty\right[)\ f'(x)=\dfrac{(1+3\sqrt{x})(1-\sqrt{x})}{\sqrt{x}(1+3x)^2}$

b- Dresser le tableau de variation de f.

4/ Construire (C)*(On accepte que* (C) *admet un point d'inflexion d'abscisse dans l'intervalle* $\left]1,2\right[$

5/ Soit g la restriction de f sur $[0,1]$

a- Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1}*sur un intervalle J à déterminer.*

b- Construire la courbe de g^{-1} *sur le même repère.*

c- Montrer que : $g^{-1}\left(\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{1}{9}$ *et que :* $\left(\forall x\in[0,1]-\dfrac{2}{3}\right)g^{-1}(x)=\left[\dfrac{-1+\sqrt{-3x^2+2x+1}}{2-3x}\right]^2$

Correction Exercice 5 :

$f(x)=\dfrac{2\sqrt{x}+2x}{1+3x}\quad(\forall x\in IR^+)$

1/ Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ *:*

On a : $f(x)=\dfrac{2\sqrt{x}+2x}{1+3x}=\dfrac{x\left(\dfrac{2}{\sqrt{x}}+2\right)}{x\left(\dfrac{1}{x}+3\right)}$ *d'où* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\dfrac{2}{\sqrt{x}}+2}{\dfrac{1}{x}+3}\right)=\dfrac{2}{3}$

Car $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{\sqrt{x}}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$

Interprétation géométrique :

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\dfrac{2}{3}$ *signifie que la courbe* (C) *admet la droite* $y=\dfrac{2}{3}$ *comme asymptote horizontale au voisinage de* $+\infty$.

2/ Calculons $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$

On a $f(0)=0$ *Donc* $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)}{x}$

$$= \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{2\sqrt{x}+2x}{x(1+3x)} \right)$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{\dfrac{2}{\sqrt{x}}+2}{1+3x} \right) = +\infty$$

<u>Interprétation géométrique :</u>

Donc f n'est pas dérivable à droite de 0 et la courbe (C) *admet une demi-tangente verticale dirigée vers le haut à droite du point O(0,0).*

3/ a- Calculons $f'(x)$ *pour* $x \in]0,+\infty[$ *:*

$$f'(x) = \left(\frac{2\sqrt{x}+2x}{1+3x} \right)'$$

$$= \frac{\left(2\dfrac{1}{2\sqrt{x}} \right)(1+3x) - 3\left(2\sqrt{x}+2x\right)}{(1+3x)^2}$$

$$= \frac{\left(1+2\sqrt{x}\right)(1+3x) - 3\sqrt{3}\left(2\sqrt{x}+2x\right)}{\sqrt{x}(1+3x)^2}$$

$$= \frac{1+3x+2\sqrt{x}+6x\sqrt{x}-6x-6x\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+3x)^2}$$

$$= \frac{1-3x+2\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+3x)^2}$$

$$= \frac{1-3\left(\sqrt{x}\right)^2+2\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+3x)^2}$$

$$= \frac{\left(1-\sqrt{x}\right)\left(1+3\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}(1+3x)^2}$$

Donc $\left(\forall x \in]0,+\infty[\right)\ f'(x) = \dfrac{\left(1+3\sqrt{x}\right)\left(1-\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}(1+3x)^2}$

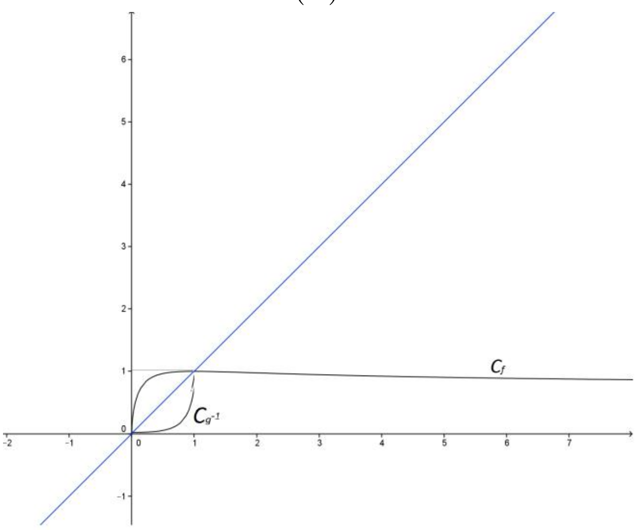
b- On a : $\left(\forall x\in\left]0,+\infty\right[\right)\ \dfrac{\left(1+3\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}\left(1+3x\right)^2}>0$

donc $f'(x)$ *est du même signe que* $\left(1-\sqrt{x}\right)\left(\forall x\in\left]0,+\infty\right[\right)$

<u>Tableau de variation de f :</u>

x	*0*		*1*		$+\infty$
f'(x)	||	+	*0*	-	
f(x)	*0*	↗	*f(1)=1*	↘	$\frac{2}{3}$

4/ Construction de (C).



5/ g la restriction de f sur $[0,1]$.

g est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[0,1]$*, donc elle admet une fonction réciproque* g^{-1} *définie sur l'intervalle :*

$$J=g\left([0,1]\right)$$
$$=f\left([0,1]\right)$$
$$=\left[f(0),f(1)\right]=[0,1]$$

b- Voir la construction de la courbe g^{-1} *sur le graphique question 4.* $\left(C_g\right)$ *est le symétrique de la portion de* (C) *sur l'intervalle* $[0,1]$ *par rapport à la première bissectrice.*

c- On a : $g\left(\dfrac{1}{9}\right)=f\left(\dfrac{1}{9}\right)$

$$=\frac{2\sqrt{\frac{1}{9}}+2\frac{1}{9}}{1+3\frac{1}{9}}=\frac{\frac{2}{3}+\frac{2}{9}}{1+\frac{1}{3}}$$

$$=\frac{3\left(\frac{2}{3}+2\frac{1}{9}\right)}{4}=\frac{2+\frac{2}{3}}{4}=\frac{8}{12}$$

Donc : $g^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{9}$

Calculons $g^{-1}(x)$ *pour* $x\in[0,1]$

On a : $\begin{cases} y=g^{-1}(x) \\ x\in[0,1] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=g(y) \\ x\in[0,1] \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{2\sqrt{y}+2y}{1+3y} \\ x\in[0,1] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(1+3y)=2\sqrt{y}+2y \\ x\in[0,1] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+3xy-2\sqrt{y}-2y=0 \\ x\in[0,1] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2-3x)y+2\sqrt{y}-x=0 \\ x\in[0,1] \end{cases}$$

On pose $\sqrt{y}=t$ car $y\in[0,1]$ *et on a :* $x\neq\frac{2}{3}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2-3x)t^2+2t-x=0 \\ x\in[0,1]-\left\{\frac{2}{3}\right\} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \Delta=4+4x(2-3x)$$
$$=4\left(1+2x-3x^2\right)$$

On a $\Delta'=4+12=16$ *;les racine de* $-3x^2+2x+1$ *sont* $-\frac{1}{3}$ *et 1 donc le polynôme est du signe contraire de (-3) sur l'intervalle* $\left[-\frac{1}{3},1\right]$ *donc :* $\forall x\in[0,1]\ -3x^2+2x+1>0$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{-2+4}{-3\times 2} = -\dfrac{1}{3} \\ x_2 = \dfrac{-2-4}{-3\times 2} = 1 \end{cases}$$

D'où :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		0	$\frac{2}{3}$		1		$+\infty$
$-3x^2+2x+1$		-	0	+		‖	+	0	-	

Or $\left(x \in [0,1] - \left\{ \dfrac{2}{3} \right\} \right)$

$\Rightarrow \Delta \geq 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} t_1 = \dfrac{-2+2\sqrt{-3x^2+2x+1}}{2(2-3x)} \\ t_2 = \dfrac{-2-2\sqrt{-3x^2+2x+1}}{2(2-3x)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t_1 = \dfrac{-1+\sqrt{-3x^2+2x+1}}{2-3x} \\ t_2 = \dfrac{-1-\sqrt{-3x^2+2x+1}}{2-3x} \end{cases}$$

Soit $x = 0 \Rightarrow t_2 = -1 \notin [0,1]$

Donc $\sqrt{y} = \dfrac{-1+\sqrt{-3x^2+2x+1}}{2-3x}$

$$\Rightarrow y = \left(\frac{-1+\sqrt{-3x^2+2x+1}}{2-3x} \right)$$

Donc : $\left(\forall x \in [0,1] - \left\{ \dfrac{2}{3} \right\} \right) g^{-1}(x) = \left[\dfrac{-1+\sqrt{-3x^2+2x+1}}{2-3x} \right]$

<u>Exercice 6 :</u>

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{x^2+4}{x} - 2\sqrt{\frac{x^2+4}{x}}$$

Et (C) *sa courbe représentative dans un repère orthonormé* $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

1/ Détermine D le domaine de définition de f.

2/ Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$. *On remarque que :* $x - 2\sqrt{x} = \sqrt{x}\left(\sqrt{x} - 2\right)$

3/ Etudier la branche infinie du (C) au voisinage de $+\infty$.

4/ a- Montrer que :

$$(\forall x \in D)\ f'(x) = \frac{x^2-4}{x^2}\left(1-\sqrt{\frac{x}{x^2+4}}\right)$$

b- Dresser le tableau de variation de f.

5/ Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet au moins une solution qui appartient à l'intervalle $\left]\frac{1}{2},1\right[$.

6/ Construire la courbe (C).

7/ Soit g la restriction de f sur $I =]0,2]$.

a- Montrer que g admet une fonction réciproque définie sur un intervalle J qu'on déterminera.

b- Construire la courbe de g^{-1} dans le même repère.

<u>Correction Exercice 6 :</u>

1/ On a : $\forall x \in IR\ x^2+4>0$ *Donc* $D = \{x \in IR / x > 0\}$

$\Rightarrow D =]0,+\infty[$

2/ $(\forall x \in D)\ f(x) = \dfrac{x^2+4}{x} - 2\sqrt{\dfrac{x^2+4}{x}}$

$$= \sqrt{\frac{x^2+4}{x}}\left(\sqrt{\frac{x^2+4}{x}}-2\right)$$

- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left[\sqrt{\dfrac{x^2+4}{x}}\left(\sqrt{\dfrac{x^2+4}{x}}-2\right)\right]$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$

- $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty}\left[\sqrt{\dfrac{x^2+4}{x}}\left(\sqrt{\dfrac{x^2+4}{x}}-2\right)\right]$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

3/ Branche infinie au voisinage de $+\infty$:

On a $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$ *et* $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{x^2+4}{x} - 2\sqrt{\dfrac{x^2+4}{x}}\right)$

$$= \frac{1}{x}\left(\frac{x^2+4}{x} - 2\sqrt{\frac{x^2+4}{x}}\right)$$

$$= \frac{x^2+4}{x^2} - 2\sqrt{\frac{x^2+4}{x^3}}$$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+4}{x^2} - 2\sqrt{\frac{x^2+4}{x^3}}\right) = 1$

Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - x$

On a :

$$f(x) - x = \frac{x^2+4}{x} - 2\sqrt{\frac{x^2+4}{x}} - x$$

$$= \frac{x^2+4-x^2}{x} - 2\sqrt{\frac{x^2+4}{x}}$$

$$= \frac{4}{x} - 2\sqrt{\frac{x^2+4}{x}}$$

D'où $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - x = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{4}{x} - 2\sqrt{\frac{x^2+4}{x}}\right) = -\infty$

Donc (C) *admet une branche parabolique au voisinage de* $+\infty$ *de direction de la droite d'équation* $y = x$.

4/a- $(\forall x \in]0,+\infty[)$ $f'(x) = \left(\frac{x^2+4}{x} - 2\sqrt{\frac{x^2+4}{x}}\right)'$

$$\Rightarrow f'(x) = \left(\frac{x^2+4}{x}\right)' - 2\left(\sqrt{\frac{x^2+4}{x}}\right)'$$

$$= \frac{2x\times x - (x^2+4)}{x^2} - \frac{\left(\frac{x^2-4}{x}\right)}{\sqrt{\frac{x^2+4}{x}}}$$

$$= \frac{x^2-4}{x^2} - \frac{\frac{x^2-4}{x}}{\sqrt{\frac{x^2+4}{x}}}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{x^2-4}{x^2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{\frac{x^2+4}{x}}}\right)$$

Donc : $(\forall x\in]0,+\infty[)\ (x-2)^2>0$

$$\Rightarrow x^2-4x+4>0$$

$$\Rightarrow x^2+4>4x$$

et $x<4x$

d'ou $0<x<x^2+4$

$$\Rightarrow 0<\frac{x}{x^2+4}<1$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{x}{x^2+4}}<1$$

Conclusion $f'(x)$ *est du même signe que* (x^2-4) *sur* $]0,+\infty[$

<u>Tableau de variation de f :</u>

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

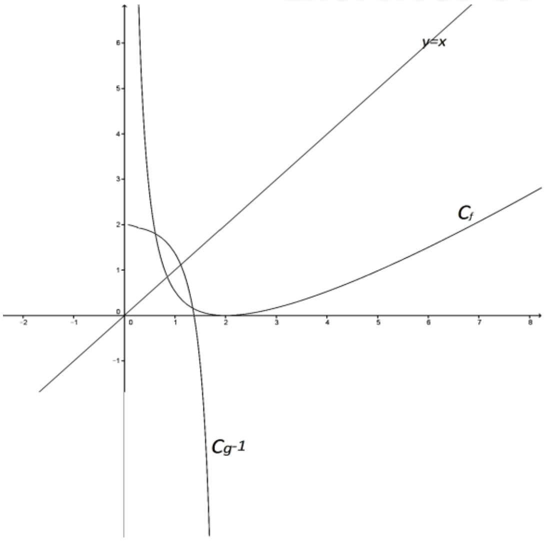
$$f(2)=\frac{4+4}{2}-2\sqrt{\frac{4+4}{2}}=0$$

5/ On considère la fonction $h(x)=f(x)-x$. h *est continue sur* $\left]\frac{1}{2},1\right[$ *et on a :*

$$\begin{cases} h\left(\frac{1}{2}\right)=8-2\sqrt{\frac{17}{2}}>0 \\ h(1)=4-2\sqrt{5}<0 \end{cases}$$

D'où l'équation $h(x)=0$ *admet au moins une solution* α *dans l'intervalle* $\left]\frac{1}{2},1\right[$ *et par suite l'équation* $f(x)=x$ *admet au moins une solution* α *dans l'intervalle* $\left]\frac{1}{2},1\right[$.

6/ Construction de (C).



7/ a- La restriction g de f sur $]0,2]$ *est continue strictement décroissante donc elle admet une fonction réciproque* g^{-1} *définie sur l'intervalle* $J = g(]0,2])$

$J = f(]0,2]) = \left[f(2), \lim_{x\to 0^+} f(x) \right[$

$J = [0,+\infty[$

b- Construction de la courbe de g^{-1} ➔ *voir la figure dans la question 6.*

La courbe de g^{-1} *est symétrique à celui de f sur* $]0,2]$ *par rapport à la première bissectrice* $y = x$.