

**EXERCICE 1 :** (1,5 points)

|     |                                                                           |
|-----|---------------------------------------------------------------------------|
| 0,5 | 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ : a) $\ln(x-1) + \ln(x+1) = \ln 15 - \ln 3$ |
| 0,5 | b) $\frac{e^{2-x}}{e^{1+2x}} \leq e^{x-1}$                                |
| 0,5 | 2) Calculer $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{1-x} - 1}{x - 1}$            |

**EXERCICE 2 :** (3 points)

|      |                                                                                                                                                                                       |
|------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|      | Soit $(u_n)$ la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{3u_n + 1}{3 + u_n} \end{cases} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$                                        |
| 0,5  | 1) a) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : 0 \leq u_n \leq 1$                                                                                                   |
| 0,5  | b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} \geq u_n$                                                                                                                          |
| 0,25 | c) En déduire que la suite $(u_n)$ est convergente.                                                                                                                                   |
|      | 2) on pose : $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$ ; pour tout $n \in \mathbb{N}$ .                                                                                                         |
| 0,5  | a) Montrer $\forall n \in \mathbb{N} : v_{n+1} = \frac{1}{2} v_n$                                                                                                                     |
| 0,5  | b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} : u_n = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n}$                                                               |
| 0,25 | c) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$                                                                                                                                        |
| 0,5  | 3) Soit $(w_n)$ la suite définie par : $w_n = \log(9 + u_n)$ ; pour tout $n \in \mathbb{N}$ .<br>Montrer que $(w_n)$ est convergente et calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n$ . |

**EXERCICE 3 :** (5 points)

|     |                                                                                                                                                |
|-----|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|     | Soit A ; B ; C et $\Omega$ quatre points d'un plan complexe d'affixes respectives: $a = -1 + 2i$ ; $b = -3 + i$ ; $c = 3 + i$ et $\omega = ia$ |
| 0,5 | 1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 2z + 5 = 0$                                                                                  |
| 0,5 | 2) a) Montrer que : $\frac{b}{b-a} = 1 - i$ et $\frac{b}{b-a} - 1 = -i$ .                                                                      |
| 0,5 | b) Montrer que $OB = \sqrt{2} AB$ et donner une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OB}; \overrightarrow{AB})$                                 |
| 1   | c) Vérifier que $\frac{b}{b-a} - 1 = \frac{b-\omega}{b-a}$ ; puis déduire que le triangle $\Omega AB$ est rectangle et isocèle en B.           |

- 0,5  
0,5  
0,5  
1
- 3) a) Déterminer l'expression complexe de la translation T de vecteur  $\overrightarrow{AB}$ .  
b) Montrer que  $d=1$  est l'affixe du point D image du point C par la translation T.  
c) Montrer que ABDC est un parallélogramme.  
4) Déterminer l'ensemble des points  $M(z)$  tels que :  $|\bar{z} + 1 + 2i| = |1 - z|$

**PROBLEME** (10,5 points)

I- soit g la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $g(x) = \frac{2x^2}{1+x^2} + \ln(1+x^2)$

Dont le tableau de variations est donné ci-dessous :

| x       | $-\infty$ | 0      | $+\infty$ |
|---------|-----------|--------|-----------|
| $g'(x)$ | -         | 0      | +         |
| $g(x)$  | $+\infty$ | $g(0)$ | $+\infty$ |

- 0,25  
0,25  
0,5  
0,25  
0,75  
0,25  
0,25  
0,5  
0,5  
0,5  
1  
0,25  
0,5  
0,5  
1
- 1) Vérifier que :  $g(0) = 0$
- 2) Montrer que  $(\forall x \in \mathbb{R}) ; g(x) \geq 0$ .
- II- on considère la fonction numérique définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = x \ln(1+x^2)$   
et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j}) ; \|\vec{i}\| = 1\text{cm}$
- 1) Montrer que f est une fonction impaire et calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .
- 2) Montrer que (C) admet une branche parabolique dont on déterminera sa direction au voisinage de  $+\infty$ .
- 3) a) Montrer que :  $\forall x \in \mathbb{R} ; f'(x) = g(x)$   
b) Calculer  $f'(0)$  et donner une interprétation géométrique au résultat.  
c) Dresser le tableau de variation de f sur  $\mathbb{R}$ .
- 4) Etudier la concavité de (C) sur  $\mathbb{R}$ .
- 5) a) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation :  $f(x) = x$   
b) Montrer que  $(\forall x \in [0; \sqrt{e-1}]) ; f(x) \leq x$
- 6) Tracer (C) et la droite (D) d'équation :  $y = x$ .
- 7) a) Montrer que f admet une fonction réciproque  $f^{-1}$  définie sur  $\mathbb{R}$ .  
b) Tracer la courbe de  $f^{-1}$  dans le même repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$   
c) Montrer que  $f^{-1}$  est dérivable en  $\sqrt{e-1}$  et calculer  $(f^{-1})'(\sqrt{e-1})$
- 8) a) Vérifier que :  $\frac{x^3}{x^2+1} = x - \frac{x}{x^2+1}$  ; pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

|      |                                                                                                                                      |
|------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 0,5  | b) calculer : $\int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx$ ; en déduire que : $\int_0^1 \frac{x^3}{x^2+1} dx = \frac{1-\ln 2}{2}$                   |
| 0,5  | c) En utilisant une intégration par parties, montrer que : $\int_0^1 f(x) dx = \frac{2\ln(2)-1}{2}$                                  |
|      | <b>III-</b> Soit $(u_n)$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ |
| 0,5  | 1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ ; $0 \leq u_n \leq \sqrt{e-1}$                                                           |
| 0,5  | 2) Montrer que $(u_n)$ est une suite décroissante.                                                                                   |
| 0,75 | 3 Montrer que $(u_n)$ est convergente et calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ .                                               |