

Exercice 1 : 04 pts

Le plan complexe étant rapporté à un repère orthonormé direct $O; \vec{u}; \vec{v}$

Soit θ un nombre réel tel que : $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] - \left\{\frac{\pi}{4}\right\}$

1) On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante : $E : z^2 - \sqrt{2}e^{i\theta}z + e^{2i\theta} = 0$

0,25 a- Vérifier que le discriminant de l'équation E est : $\Delta = \sqrt{2}ie^{i\theta}$

0,75 b- Ecrire sous forme trigonométrique les deux solutions z_1 et z_2 de l'équation E

2) On considère les points I, J, T_1, T_2 et A d'affixes respectives

$1, -1, e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}, e^{i\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)}$ et $\sqrt{2}e^{i\theta}$

0,5 a - Montrer que les deux droites OA et T_1T_2 sont perpendiculaires.

0,5 b - Soit K le milieu du segment T_1T_2 . Montrer que les points O, K et A sont alignés.

0,5 c - En déduire que la droite OA est la médiatrice du segment T_1T_2 .

3) Soit r la rotation de centre T_1 et d'angle $\frac{\pi}{2}$

0,25 a - Donner l'expression complexe de la rotation r

0,25 b - Vérifier que l'affixe du point B image du point I par la rotation r est :
 $b = \sqrt{2}e^{i\theta} + i$

0,25 c- Montrer que les deux droites AB et IJ sont perpendiculaires.

0,5 4) Déterminer l'affixe du point C image du point A par la translation de vecteur $-\vec{v}$

0,25 5) Montrer que A est le milieu du segment BC

Exercice 2 : 06 pts

Partie I :

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par : $g(x) = 1 + x \ln x$

0,5 1) Etudier les variations de la fonction g sur l'intervalle $]0; +\infty[$

0,5 2) Montrer que pour tout $x > 0$; $1 + x \ln x > 0$ puis déduire que : $\forall x > 0$; $x > \ln x$.

Partie II :

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par :
$$\begin{cases} f(x) = \frac{x}{1+x \ln x} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

Et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

- 0,5 1) Etudier la continuité et la dérivabilité de f à droite en 0.
 0,75 2) Etudier les variations de la fonction f , puis déduire que : $f([0; +\infty[) =]0; 1]$
 0,5 3) a) Etudier la position relative de (C_f) et de la droite (Δ) d'équation $y = x$
 0,5 b) Construire (C_f) .

Partie III :

Soit n un entier naturel non nul.

- 0,75 1) Montrer que l'équation $f(x) = \frac{1}{n}$ admet dans $]0; +\infty[$ deux solutions x_n et y_n
 tels que : $x_n \leq 1 \leq y_n$
 0,25 2) a) Montrer que la suite $(y_n)_{n \geq 1}$ est croissante.
 0,25 b) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : n \leq y_n$ (On pourra utiliser l'inégalité $\forall x > 0 \quad x - 1 \geq \ln x$)
 0,25 c) Déduire la limite de la suite $(y_n)_{n \geq 1}$.
 0,25 d) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{1 + y_n \ln y_n}$.
 0,5 3) a) Montrer que la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ est décroissante ; puis déduire qu'elle est convergente
 0,5 b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : x_n \leq \frac{1}{n}$; puis déduire la limite de la suite $(x_n)_{n \geq 1}$

Exercice 3 : 06,5 pts

Partie A :

- 0,25 1) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}) : e^x \geq x + 1$
 0,25 2) En déduire que : $(\forall x \in \mathbb{R}^+) : e^x \geq 1 + x + \frac{1}{2}x^2$
 3) On admet que : $(\forall x \in \mathbb{R}^+) : e^x - 1 - x - \frac{1}{2}x^2 \leq \frac{x^3 e^x}{6}$
 0,5 Montrer que : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \frac{1}{2}$

Partie B :

Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$g(x) = \frac{x e^x - e^x + 1}{e^x - 1} - \ln \left(\frac{e^x - 1}{x} \right)$$

1) On pose $h(x) = e^{2x} - x^2 e^x - 2e^x + 1$ pour tout réel x .

0,5 Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^+) : h(x) \geq 0$ (on pourra utiliser (A-2))

0,5 2) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^*) : g'(x) = \frac{1}{x(e^x - 1)^2} h(x)$

0,5 3) a-Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 0$.

0,5 b- En déduire que $(\forall x \in]0, +\infty[) : g(x) \geq 0$.

Partie C :

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(0) = \frac{1}{2} \text{ et } f(x) = \frac{1}{x} \ln \left(\frac{e^x - 1}{x} \right) \text{ si } x \neq 0$$

(C) est la courbe de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

0,5 1) Montrer que : $D_f = \mathbb{R}$.

0,5 2) Montrer que le point $A \left(0, \frac{1}{2} \right)$ est un centre de symétrie de (C).

0,5 3) Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = 1$ est une asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$.

0,5 4) Montrer que f est continue à droite en 0.

0,5 5) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^*) : f'(x) = \frac{1}{x^2} g(x)$.

6) On admet que : $f'(0) = \frac{1}{24}$.

0,5 Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

0,5 7) Construire la courbe (C).

Exercice 4 : 3,5 pts

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f_n(x) = \arctan x - \frac{n}{x}$$

0,5 1) a- Montrer que l'équation $f_n(x) = \frac{\pi}{2} - 1$ admet une solution unique a_n dans $]0, +\infty[$

0,5 b-Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : a_n > n$, puis en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$

0,5 2) En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) : \arctan x < x$

0,5 3) a- Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : f_n(n + \sqrt{n}) = \frac{\pi}{2} - \arctan \left(\frac{1}{n + \sqrt{n}} \right) - \frac{\sqrt{n}}{1 + \sqrt{n}}$

0,25 b- En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : a_n < n + \sqrt{n}$

0,25 c- Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{n}$

0,25 4) a- Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : \arctan\left(\frac{1}{a_n}\right) = 1 - \frac{n}{a_n}$

0,25 b- En déduire : $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n - n$

0,5 5) Montrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 (\arctan a_n - \arctan n) = 1$

0,25 4) a - Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : \arctan\left(\frac{1}{a_n}\right) = 1 - \frac{n}{a_n}$

0,25 b - En déduire : $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n - n$

0,5 5) Montrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 (\arctan a_n - \arctan n) = 1$

Correction

Exercice 1

1) $z^2 - \sqrt{2}e^{i\theta}z + e^{i2\theta} = 0 : (E)$

a) Le discriminant de l'équation (E) est : $\Delta = (-\sqrt{2}e^{i\theta})^2 - 4e^{i2\theta}$
 $= -2e^{i2\theta}$
 $= (i\sqrt{2}e^{i\theta})^2$

b) •) $z_1 = \frac{\sqrt{2}e^{i\theta} + i\sqrt{2}e^{i\theta}}{2}$
 $= \frac{\sqrt{2}e^{i\theta}(1+i)}{2}$ et $1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

donc : $z_1 = \frac{\sqrt{2}e^{i\theta} \times \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{2}$

$$z_1 = e^{i\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)}$$

•) $z_2 = \frac{\sqrt{2}e^{i\theta} - i\sqrt{2}e^{i\theta}}{2}$
 $= \frac{\sqrt{2}e^{i\theta}(1-i)}{2}$ et $1-i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

donc : $z_2 = \frac{\sqrt{2}e^{i\theta} \times \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}{2}$

$$z_2 = e^{i\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)}$$

Alors : $S = \left\{ e^{i\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)} ; e^{i\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)} \right\}$

$$\begin{aligned}
 2 - a) \frac{z_{T_1} - z_{T_2}}{z_A - z_O} &= \frac{e^{i\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)} - e^{i\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{2}e^{i\theta}} \\
 &= \frac{e^{i\theta} \left(e^{i\frac{\pi}{4}} - e^{-i\frac{\pi}{4}} \right)}{\sqrt{2}e^{i\theta}} \\
 &= \frac{e^{i\theta} 2i \sin \frac{\pi}{4}}{\sqrt{2}e^{i\theta}} \\
 &= i \in i\mathbb{R}^*
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b) z_K &= (z_{T_1} + z_{T_2}) \frac{1}{2} \\
 &= \frac{e^{i\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)} + e^{i\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)}}{2} \\
 &= \frac{e^{i\theta} \left(e^{i\frac{\pi}{4}} + e^{-i\frac{\pi}{4}} \right)}{2} \\
 &= \frac{e^{i\theta} 2 \cos \frac{\pi}{4}}{2} \\
 &= \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\theta}
 \end{aligned}$$

$$\text{donc : } z_K = \frac{1}{2} z_A \Rightarrow \frac{z_K}{z_A} = \frac{1}{2} \in \mathbb{R}$$

D'où les points O ; A et K sont alignés.

c) (OA) passe par K milieu du segment $[T_1 T_2]$ car O ; A et K sont alignés et $(OA) \perp (T_1 T_2)$.

Donc (OA) est la médiatrice de $[T_1 T_2]$.

$$\begin{aligned}
 3) a) r(M(z)) = M'(z') &\Leftrightarrow (z' - z_{T_1}) = (z - z_{T_1}) e^{i\frac{\pi}{2}} \\
 &\Leftrightarrow z' = i(z - z_{T_1}) + z_{T_1}^* \\
 &\Leftrightarrow z' = iz + z_{T_1}(1 - i) \\
 &\Leftrightarrow z' = iz + e^{i\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)} \times \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}} \\
 &\Leftrightarrow \boxed{z' = iz + \sqrt{2} e^{i\theta}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b) z_B &= iz_I + \sqrt{2} e^{i\theta} \\
 &= i + \sqrt{2} e^{i\theta}
 \end{aligned}$$

$$c) \frac{z_B - z_A}{z_I - z_J} = \frac{i + \sqrt{2} e^{i\theta} - \sqrt{2} e^{i\theta}}{1 + 1}$$

$$= \frac{1}{2}i \in i\mathbb{R}^*$$

Donc $(AB) \perp (IJ)$

$$\begin{aligned} 4) z_C &= z_A + z_{-\vec{v}} & (\vec{v}(i)) \\ &= \sqrt{2}e^{i\theta} - i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5) \frac{z_B + z_C}{2} &= \frac{i + \sqrt{2}e^{i\theta} + \sqrt{2}e^{i\theta} - i}{2} \\ &= \sqrt{2}e^{i\theta} \\ &= z_A \end{aligned}$$

d'où A est milieu de [BC]

Exercice 2

Partie I:

$$g(x) = 1 + x \ln x \quad x > 0$$

$$g'(x) = \ln x + 1 \quad x > 0$$

$$\ln x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \geq -1$$

$$\Leftrightarrow x \geq e^{-1}$$

x	0	e^{-1}	$+\infty$
$g'(x)$		-	0
$g(x)$			

$\searrow 1 - e^{-1} = \frac{e-1}{e} \nearrow$

2) g admet un minimum $\frac{e-1}{e}$ donc

$$\forall x > 0 ; g(x) \geq \frac{e-1}{e} > 0$$

D'où $1 + x \ln x > 0 ; \forall x > 0$

• On a : $\forall x > 0 ; 1 + x \ln x > 0$

$$\text{Donc pour } \frac{1}{x} > 0 \text{ on a : } 1 + \frac{1}{x} \ln \frac{1}{x} > 0 \Rightarrow x \times \left(1 + \frac{1}{x} \ln \frac{1}{x} \right) > 0$$

$$\Rightarrow x - \ln x > 0$$

$$\Rightarrow x > \ln x$$

Partie II

$$1) \bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$$

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 + x \ln x} = 1$

Donc f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = 1$.

$$2) \forall x > 0 ; f'(x) = \frac{1 + x \ln x - x(\ln x + 1)}{(1 + x \ln x)^2}$$

$$= \frac{1 - x}{(1 + x \ln x)^2}$$

Tableau de variations de f

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	0	1	0

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{1 + x \ln x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{1}{x} + \ln x}$$

- f continue et strictement croissante sur $]0;1]$,

Donc $f(]0;1]) =]f(0); f(1)] =]0;1]$

- f continue et strictement décroissante sur $[1; +\infty[$,

$f([1; +\infty[) =]\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); f(1)] =]0;1]$

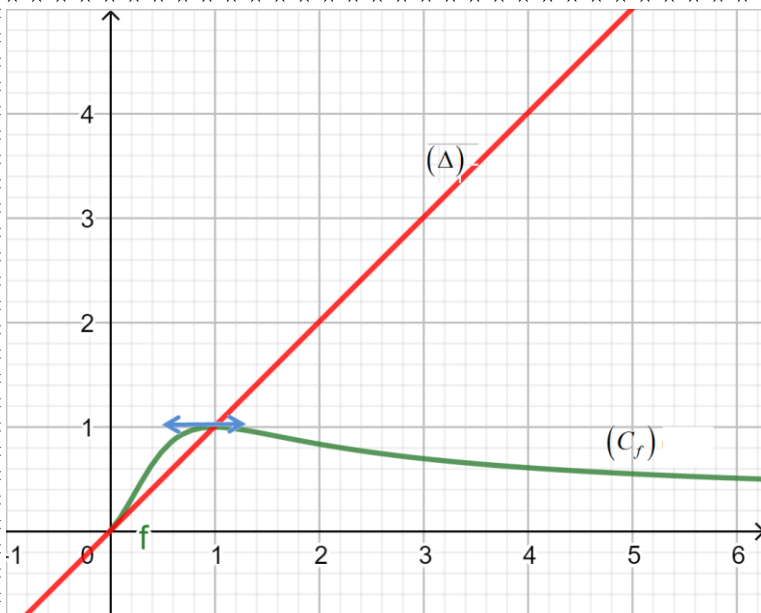
$$3) \forall x > 0 ; f(x) - x = \frac{x}{1 + x \ln x} - x$$

$$= \frac{-x^2 \ln x}{1 + x \ln x}$$

Et $f(0) - 0 = 0$

x	0	1	$+\infty$
$f(x) - x$	0	+	-
position	(C_f) est au-dessus de (Δ)	(C_f) est au-dessous de (Δ)	

$(C_f) \cap (\Delta) = \{O(0;0); A(1;1)\}$



Partie III

- La restriction de f à $]0;1]$ est continue et strictement croissante donc réalise une bijection de $]0;1]$ sur $f(]0;1]) =]0;1]$

$$n \geq 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{n} \leq 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n} \in]0;1]$$

Donc l'équation $f(x) = \frac{1}{n}$ admet une solution unique x_n dans $]0;1]$.

- La restriction de f à $[1+\infty[$ est continue et strictement décroissante donc réalise une bijection de $[1+\infty[$ sur $f([1+\infty[) =]0;1]$ et $\frac{1}{n} \in]0;1]$

Donc l'équation $f(x) = \frac{1}{n}$ admet une solution unique y_n dans $[1+\infty[$.

D'où l'équation $f(x) = \frac{1}{n}$ admet deux solutions x_n et y_n telles que : $0 < x_n \leq 1 \leq y_n$

2) a) On a $f(y_{n+1}) = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} = f(y_n)$

Comme f est strictement décroissante sur $[1+\infty[$; alors : $y_{n+1} > y_n$

D'où la suite $(y_n)_{n \geq 1}$ est croissante.

$$\begin{aligned} \text{b) } f(n) - f(y_n) &= \frac{1}{1+n \ln n} - \frac{1}{n} \\ &= \frac{n^2 - 1 - n \ln n}{n(1+n \ln n)} \\ &= \frac{n^2 - n - n \ln n + n - 1}{n(1+n \ln n)} \end{aligned}$$

$$= \frac{n(n-1-\ln n)+n-1}{n(1+n\ln n)} \geq 0$$

$$\text{Car } n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow n-1 \geq 0 \quad \begin{cases} n-1 \geq 0 \\ n-1-\ln n \geq 0 \end{cases}$$

Donc $f(n) \geq f(y_n) \Rightarrow n \leq y_n$ (f est décroissante sur $[1+\infty[$)

c) On a : $n \leq y_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$; donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = +\infty$

$$\begin{aligned} d) f(y_n) = \frac{1}{n} &\Leftrightarrow \frac{y_n}{1+y_n \ln y_n} = \frac{1}{n} \\ &\Leftrightarrow \frac{n}{1+y_n \ln y_n} = \frac{1}{y_n} \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{1+y_n \ln y_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{y_n} = 0$$

3) a) $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \Rightarrow f(x_{n+1}) < f(x_n)$; et f est croissante sur $]0;1]$; donc $x_{n+1} < x_n$

D'où $(x_n)_{n \geq 1}$ est décroissante et comme elle est minorée par 0 ; elle est donc convergente.

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{n}\right) &= \frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n} \ln \frac{1}{n}} \\ &= \frac{1}{n - \ln n} \end{aligned}$$

$$\bullet n \geq 1 \Rightarrow \ln n \geq 0$$

$$\Rightarrow 0 < n - \ln n \leq n$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n - \ln n} \geq \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{1}{n}\right) \geq f(x_n) \quad ; \text{ est } f \text{ est strictement croissante sur }]0;1] \quad ; \text{ donc } x_n \leq \frac{1}{n}$$

$$\text{On a : } 0 \leq x_n \leq \frac{1}{n} \quad ; \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$\text{D'où : } \boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0}$$

Exercice 3

Partie A

1) On pose : $u(x) = e^x - x - 1$

u dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u'(x) = e^x - 1$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$u'(x)$	-	0	+
$u(x)$			

0 est un minimum de $u(x)$ donc : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; u(x) \geq 0$

$$\Rightarrow (\forall x \in \mathbb{R}) ; e^x \geq x + 1$$

2) On pose : $v(x) = e^x - x - 1 - \frac{1}{2}x^2$

$$\Rightarrow e^x \geq -x - \frac{1}{2}x^2$$

v dérivable sur $\mathbb{R}$ et $v'(x) = e^x - 1 - x = u(x)$

Donc : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; v'(x) \geq 0$

donc v est croissante sur $\mathbb{R}^+$

Alors : $(\forall x \in \mathbb{R}^+) ; v(x) \geq v(0) \Rightarrow e^x - x - 1 - \frac{1}{2}x^2 \geq 0$

$$\Rightarrow e^x \geq x + 1 + \frac{1}{2}x^2$$

On a pour tout $x > 0$: $e^x \geq x + 1 + \frac{1}{2}x^2 \Rightarrow e^x - x - 1 \geq \frac{1}{2}x^2$ (1)

Et on a : $e^x - x - 1 - \frac{1}{2}x^2 \leq \frac{x^3 e^x}{6} \Rightarrow e^x - x - 1 \leq \frac{1}{2}x^2 + \frac{x^3 e^x}{6}$ (2)

Donc pour tout $x > 0$ de (1) et (2) on a :

$$\frac{1}{2}x^2 \leq e^x - x - 1 \leq \frac{1}{2}x^2 + \frac{x^3 e^x}{6} \Rightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{e^x - x - 1}{x^2} \leq \frac{1}{2} + \frac{x e^x}{6}$$

Et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{2} + \frac{x e^x}{6} \right) = \frac{1}{2}$; d'où : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{e^x - x - 1}{x^2} \right) = \frac{1}{2}$

Partie B

1) $h(x) = e^{2x} - x^2 e^x - 2e^x + 1$

h dérivable sur $\mathbb{R}$; et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$h'(x) = 2e^{2x} - 2xe^x - x^2 e^x - 2e^x$$

$$= 2e^x \left(e^x - x - 1 - \frac{x^2}{2} \right) \geq 0 ; (\forall x \in \mathbb{R}^+)$$

Car $\begin{cases} 2e^x > 0 \\ e^x - x - 1 - \frac{x^2}{2} \geq 0 \quad (\forall x \in \mathbb{R}^+) ; \quad (d'après A-2) \end{cases}$

donc h est croissante sur $\mathbb{R}^+$

$$(\forall x \in \mathbb{R}^+) ; x \geq 0 \Rightarrow h(x) \geq h(0) \text{ et } h(0) = 0$$

$$(\forall x \in \mathbb{R}^+) ; \boxed{h(x) \geq 0}$$

$$2) g(x) = \frac{xe^x - e^x + 1}{e^x - 1} - \ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right)$$

$$g'(x) = \left(\frac{xe^x - e^x + 1}{e^x - 1} - \ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right) \right)'$$

$$= \frac{(e^x + xe^x - e^x)(e^x - 1) - (xe^x - e^x + 1)e^x}{(e^x - 1)^2} - \left(\frac{e^x - 1}{x} \right)'$$

$$= \frac{(e^x + xe^x - e^x - xe^x + e^x - 1)e^x - e^x - xe^x + e^x}{(e^x - 1)^2} - \frac{xe^x - (e^x - 1)}{x^2} \times \frac{x}{e^x - 1}$$

$$= \frac{(e^x - 1)e^x - xe^x}{(e^x - 1)^2} - \frac{xe^x - (e^x - 1)}{x(e^x - 1)}$$

$$= \frac{(e^x - 1)xe^x - x^2e^x - xe^x(e^x - 1) + (e^x - 1)^2}{x(e^x - 1)^2}$$

$$= \frac{xe^{2x} - xe^x - x^2e^x - xe^{2x} + xe^x + e^{2x} - 2e^x + 1}{x(e^x - 1)^2}$$

$$= \frac{e^{2x} - x^2e^x - 2e^x + 1}{x(e^x - 1)^2}$$

$$= \frac{h(x)}{x(e^x - 1)^2}$$

Donc : $\boxed{(\forall x \in \mathbb{R}^*) : g'(x) = \frac{1}{x(e^x - 1)^2} h(x)}$

$$3) a) \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{xe^x - e^x + 1}{e^x - 1} - \ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right) \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x}{e^x - 1} \cdot e^x - 1 - \ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right) \right) = 0$$

$$(Car \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln \left(\frac{e^x - 1}{x} \right) = \ln(1) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{x} = 1 ;$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln \left(\frac{e^x - 1}{x} \right) = \ln(1) = 0 \text{ (ln est continue en 1))}$$

$$b) g'(x) = \frac{h(x)}{x(e^x - 1)^2} > 0 ; \quad \forall x > 0$$

Donc g est continue et strictement croissante sur $]0; +\infty[$; alors

$$g(]0; +\infty[) = \left] \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) \right[\\ = \left] 0; \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) \right[\subset]0; +\infty[$$

D'où : $\forall x > 0 ; g(x) > 0$

partie C

$$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R}^* / x \neq 0 \text{ et } \frac{e^x - 1}{x} > 0 \right\} \cup \{0\}$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$e^x - 1$	$-$	0	$+$
x	$-$	0	$+$
$\frac{e^x - 1}{x}$	$+$	$ $	$+$

Donc $D_f = \mathbb{R}^* \cup \{0\} = \mathbb{R}$

2) $D_f = \mathbb{R} ; \forall x \in D_f$ alors $-x \in D_f$

$$\begin{aligned} f(x) + f(-x) &= \frac{1}{x} \ln \left(\frac{e^x - 1}{x} \right) - \frac{1}{x} \ln \left(\frac{e^{-x} - 1}{-x} \right) \\ &= \frac{1}{x} \left(\ln \left(\frac{e^x - 1}{x} \right) - \ln \left(\frac{e^{-x}(1 - e^x)}{-x} \right) \right) \\ &= \frac{1}{x} \left(\ln \left(\frac{e^x - 1}{x} \right) - \ln e^{-x} - \ln \left(\frac{(e^x - 1)}{x} \right) \right) \\ &= \frac{1}{x} \times x \\ &= 1 \\ &= 2 \times \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Donc $A\left(0; \frac{1}{2}\right)$ est un centre de symétrie de (C) .

Donc il suffit d'étudier f sur $\mathbb{R}^+$.

$$\begin{aligned} 3) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \ln \left(\frac{e^x - 1}{x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \ln \left(\frac{e^x (1 - e^{-x})}{x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \left(\ln e^x + \ln \left(\frac{1 - e^{-x}}{x} \right) \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \ln(1 - e^{-x}) - \frac{\ln x}{x} \right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$(\text{car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 - e^{-x}) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{x} \right) = 0)$$

Donc (Δ) : $y = 1$ est une asymptote horizontale à (C) au voisinage de $+\infty$.

$$\begin{aligned} 4) \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \ln \left(\frac{e^x - 1}{x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \left(\frac{e^x - 1}{x} - 1 \right) \frac{\ln \left(\frac{e^x - 1}{x} \right)}{\frac{e^x - 1}{x} - 1} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\text{Car } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \left(\frac{e^x - 1}{x} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \frac{1}{2} \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \left(\frac{e^x - 1}{x} \right)}{\frac{e^x - 1}{x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(X)}{X - 1} = 1$$

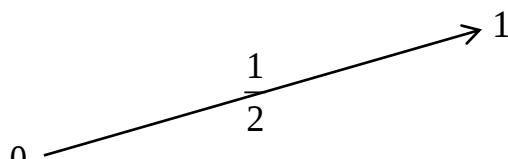
$$(\text{On pose } \frac{e^x - 1}{x} = X) \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

d'où f est continue à droite en 0.

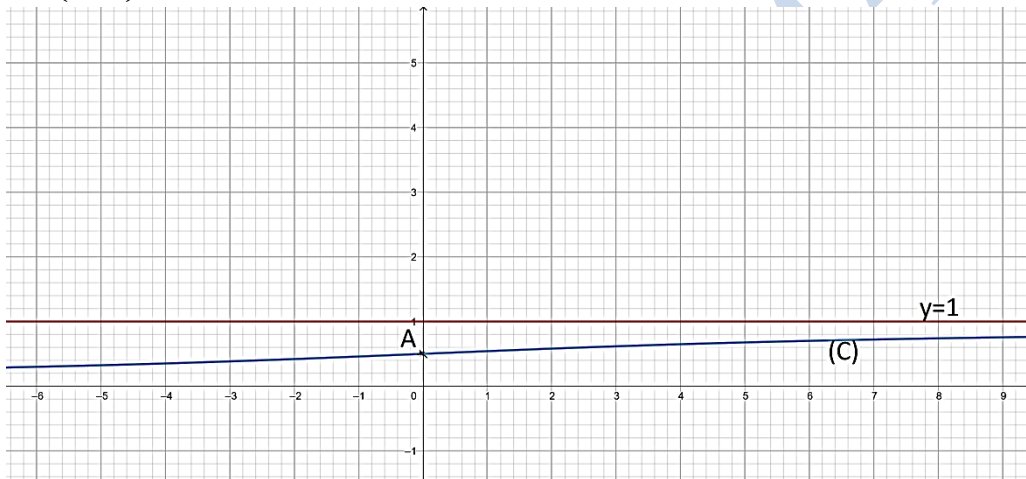
$$\begin{aligned} 5) f'(x) &= \left(\frac{1}{x} \ln \left(\frac{e^x - 1}{x} \right) \right)' \\ &= -\frac{1}{x^2} \times \ln \left(\frac{e^x - 1}{x} \right) + \frac{1}{x} \times \frac{\left(\frac{e^x - 1}{x} \right)'}{\left(\frac{e^x - 1}{x} \right)} \\ &= -\frac{1}{x^2} \times \ln \left(\frac{e^x - 1}{x} \right) + \frac{1}{x} \times \frac{xe^x - (e^x - 1)}{x^2} \times \frac{x}{e^x - 1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{x^2} \times \ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right) + \frac{xe^x - e^x + 1}{x^2(e^x - 1)} \\
&= \frac{1}{x^2} \left(\frac{xe^x - e^x + 1}{(e^x - 1)} - \ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right) \right) \\
&= \frac{1}{x^2} g(x)
\end{aligned}$$

c) pour tout $x > 0$; $f'(x) = \frac{1}{x^2} g(x)$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$			

$(A(0; \frac{1}{2}))$ est un centre de symétrie pour (C)



Exercice 4

1) $f_n(x) = \arctan x - \frac{n}{x}$

a) • La fonction $x \mapsto \arctan x$ est continue et dérivable sur $]0; +\infty[$

• La fonction $x \mapsto -\frac{n}{x}$ est continue et dérivable sur $]0; +\infty[$

Donc la fonction $x \mapsto \arctan x - \frac{n}{x}$ est continue et dérivable sur $]0; +\infty[$; pour tout

$$x \in]0; +\infty[\text{ on a : } f'_n(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{n}{x^2} > 0$$

Donc f_n est strictement croissante sur $]0; +\infty[$; d'où elle réalise une bijection de $]0; +\infty[$ sur $f_n(]0; +\infty[)$ =

$$f_n(]0; +\infty[) = \left] \lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x) ; \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) \right[= \left] -\infty ; \frac{\pi}{2} \right[$$

Et $\frac{\pi}{2} - 1 \in \left] -\infty; \frac{\pi}{2} \right[$ d'où l'équation $f_n(x) = \frac{\pi}{2} - 1$ admet une unique solution α_n dans $]0; +\infty[$

b) $f_n(n) = \arctan n - 1$

$$\arctan n < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \arctan n - 1 < \frac{\pi}{2} - 1$$

$$\Rightarrow f_n(n) < f_n(\alpha_n)$$

Et f_n est strictement croissante sur $]0; +\infty[$; d'où $n < \alpha_n$

$$\left. \begin{array}{l} n < \alpha_n \\ \lim_{n \rightarrow \infty} n = +\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = +\infty$$

2) Soit $x > 0$

$\arctan$ est continue sur $[0; x]$.

$$\forall t \in]0; x[; (\arctan)'(t) = \frac{1}{1+t^2}$$

$$0 < t < x \Rightarrow \frac{1}{1+x^2} < \frac{1}{1+t^2} < 1$$

D'après T.A.F :

$$\frac{1}{1+x^2}(x-0) < \arctan x - \arctan 0 < 1(x-0)$$

$$\Rightarrow \boxed{\forall x > 0 ; \arctan x < x}$$

3) a) $f_n(n + \sqrt{n}) = \arctan(n + \sqrt{n}) - \frac{n}{(n + \sqrt{n})}$

$$= \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{n + \sqrt{n}}\right) - \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n} + 1}$$

$$(car \ \forall x > 0 ; \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2})$$

b) $\frac{1}{n + \sqrt{n}} > 0 \Rightarrow \arctan\left(\frac{1}{n + \sqrt{n}}\right) < \frac{1}{n + \sqrt{n}}$

$$\Rightarrow \arctan\left(\frac{1}{n + \sqrt{n}}\right) + \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n} + 1} < \frac{1}{n + \sqrt{n}} + \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n} + 1}$$

$$\Rightarrow \arctan\left(\frac{1}{n + \sqrt{n}}\right) + \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n} + 1} < \frac{1}{n + \sqrt{n}} + \frac{n}{n + \sqrt{n}}$$

$$et \ \frac{1}{n + \sqrt{n}} + \frac{n}{n + \sqrt{n}} = \frac{n+1}{n + \sqrt{n}} \leq 1$$

$$Donc \arctan\left(\frac{1}{n + \sqrt{n}}\right) + \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n} + 1} < 1 \Rightarrow -\arctan\left(\frac{1}{n + \sqrt{n}}\right) - \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n} + 1} > -1$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{n+\sqrt{n}}\right) - \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+1} > \frac{\pi}{2} - 1$$

$$\Rightarrow f_n(n+\sqrt{n}) > \frac{\pi}{2} - 1$$

$$\Rightarrow f_n(n+\sqrt{n}) > f_n(\alpha_n)$$

Et f_n est strictement croissante sur $]0; +\infty[$; d'où $\boxed{\alpha_n < n+\sqrt{n}}$

$$c) n < \alpha_n < n+\sqrt{n} \Rightarrow 1 < \frac{\alpha_n}{n} < 1+\frac{\sqrt{n}}{n} \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} 1+\frac{\sqrt{n}}{n} = 1$$

$$\text{Donc } \boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha_n}{n} = 1}$$

$$4) a) f_n(\alpha_n) = \frac{\pi}{2} - 1 \Rightarrow \arctan \alpha_n - \frac{n}{\alpha_n} = \frac{\pi}{2} - 1$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{n}{\alpha_n} = \underbrace{\frac{\pi}{2} - \arctan \alpha_n}_{=\arctan \frac{1}{\alpha_n}}$$

$$\Rightarrow \boxed{1 - \frac{n}{\alpha_n} = \arctan \frac{1}{\alpha_n}}$$

$$b) \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n - n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n \left(1 - \frac{\alpha_n}{n}\right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n \cdot \arctan \frac{1}{\alpha_n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\arctan \frac{1}{\alpha_n}}{\frac{1}{\alpha_n}}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\arctan t}{t} = 1$$

$$(\text{On pose } t = \frac{1}{\alpha_n} \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = +\infty)$$

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n - n = 1}$$

5) $\arctan$ est continue sur $[n; \alpha_n]$; dérivable sur $]n; \alpha_n[$

$$\forall t \in]n; \alpha_n[; (\arctan)'(t) = \frac{1}{1+t^2}$$

$$n < t < \alpha_n \Rightarrow \frac{1}{1+\alpha_n^2} < (\arctan)'(t) < \frac{1}{1+n^2}$$

D'après T.A.F :

$$\frac{\alpha_n - n}{1 + \alpha_n^2} < \arctan \alpha_n - \arctan n < \frac{\alpha_n - n}{1 + n^2} \Rightarrow \frac{\alpha_n - n}{\frac{1}{n^2} + \left(\frac{\alpha_n}{n}\right)^2} < n^2 (\arctan \alpha_n - \arctan n) < \frac{\alpha_n - n}{\frac{1}{n^2} + 1}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n - n = 1 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha_n}{n} = 1$$

$$\text{Alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha_n - n}{\frac{1}{n^2} + \left(\frac{\alpha_n}{n}\right)^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha_n - n}{\frac{1}{n^2} + 1} = 1$$

$$D'où \boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 (\arctan \alpha_n - \arctan n) = 1}$$