

Exercice 1 :

Partie A :

Soit g définie sur $]0; +\infty[$, par : $g(x) = x + (x - 2)\ln x$

1) a) montrer que $g'(x) = 2 \times \frac{x-1}{x} + \ln x$

b) déduire que : si $x > 1$ alors $g'(x) > 0$ et $g'(x) < 0$ si $0 < x < 1$

2) a) Etudier les variations de g

b) en déduire que $g(x) \geq 1$

Partie B :

Soit f définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = 1 + x\ln x - (\ln x)^2$

1) a) montrer que $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$ et étudier les variations de f

b) En déduire que f admet une fonction réciproque définie sur un intervalle J que l'on précisera.

2) a) Ecrire une équation de la tangente T au point d'abscisse 1

b) Etudier les variations de h définie sur $]0; +\infty[$ par : $h(x) = x - 1 - \ln x$; en déduire le signe de h

c) montrer que : $f(x) - x = (\ln x - 1)h(x)$, déduire la position de la courbe C par rapport T

3) tracer C_f et $C_{f^{-1}}$

4) a) calculer : $I_1 = \int_1^e x \ln x dx$ et $I_2 = \int_1^e (\ln x)^2 dx$

On désigne par A l'aire en de la partie du plan limitée par les courbes C_f et $C_{f^{-1}}$, calculer A

Exercice 2

Partie A :

Soit la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{1}{x} + \ln x$. On désigne par C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1) Dresser le tableau de variation de f .

2) a) montrer que la courbe C_f admet un point d'inflexion I dont on déterminera les coordonnées.

b) Ecrire l'équation de la tangente T au point I .

3) a) calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et interpréter graphiquement ce résultat.

b) Tracer C_f .

4) Soit α un réel strictement positif supérieur à 1 et $A(\alpha)$ l'aire limitée par la courbe C_f et les droites d'équations $x=1$ et $x=\alpha$.

a) Calculer $A(\alpha)$.

b) Déterminer α pour que : $A(\alpha)$.

Partie B :

Soit $g(x) = f(x) - x$ pour tout $x > 0$

1) Montrer que g réalise une bijection de $]0; +\infty[$ sur $\mathbb{R}$.

2) Calculer $g(1)$ puis montrer que pour tout $x \geq 1$ on a : $f(x) \leq x$.

3) Montrer que g^{-1} est dérivable en 0 et déterminer $(g^{-1})'(0)$.

4) Soit (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :
$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; U_n \geq 1$.

b) Montrer que (U_n) est décroissante.

c) En déduire que (U_n) est convergente et calculer sa limite.