Série n° 8 d'exercices sur « les intégrales et les sommes de Reimann »

2éme Bac S.M

Exercice 1

En utilisant les sommes de Riemann, calculer la limite (si elle existe) : $\sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{n}{n^2+k^2}\right)$

Exercice 2

On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$.

1) Trouver une fonction $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ continue positive telle que $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$.

2) Calculer $\lim_{n\to+\infty} S_n$.

Exercice 3

Soit x un réel strictement positif.

1. Montrer que : $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{kx}{n}} = \frac{e^x-1}{x}$

2. En déduire, pour tout $x>0$, la relation $\int_0^x e^t dt = e^x - 1$

Exercice 4

Etablir les propriétés suivantes à l'aide de changements de variable simples.

a) Si f est une fonction continue de $[a;b]$ dans $\mathbb{R}$, $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$.

b) Si f est une fonction continue de $[-1;1]$ dans $\mathbb{R}$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx$

c) Si f est une fonction continue de $[-1;1]$ dans $\mathbb{R}$, $\int_0^{\pi} xf(\sin x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\,dx = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx.$

Application. Calculer $\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$.

Exercice 5

Calculer les intégrales suivantes :

a) $\int_0^1 \frac{e^x}{e^{-x}+1}dx$ b) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x\left(1+\tan^2 x\right)}{\sin x+\cos x}dx$ c) $\int_0^{\pi} \sin^5(x)\cos^2(x)\,dx$

d) $\int_0^{\pi} \frac{\cos^{21}(x)}{1+\sin^{13}(x)}\,dx$ e) $\int_0^1 \left(\frac{x+2}{x+1}\right)^3 dx$ f) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin^2 x}{\sqrt{1-\cos x}}dx$

g) $\int_0^1 \frac{x^2\arctan x}{1+x^2}dx$

Exercice 6

Calculer les intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{\left(e^{-x}+1\right)^2}dx$ b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos x\left(\sin x+\cos x\right)}dx$ c) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin^3(x)\cos^4(x)\ dx$

d) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\cos^{79}(x)}{1+\sin^{15}(x)}\ dx$ e) $\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{x+3}{x+2}\right)^3 dx$ f) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{\sqrt{1+\sin x}}dx$

g) $\displaystyle\int_0^1 x\left(\arctan x\right)^2 dx$

Exercice 7

On pose pour tout entier $n\geq 0$: $u_n=\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^n}\,dx$.

a) Etudier la monotonie de la suite (u_n).

b) Etablir que, pour tout x de $[0;1]$ *, on a les inégalités* $1-x^n\leq\sqrt{1-x^n}\leq 1-\dfrac{x^n}{2}$.

c) En intégrant les inégalités ci-dessus entre 0 et 1, déduire que la suite $\left(n\left(u_n-1\right)\right)$ *est bornée.*

Exercice 8

a) Montrer que pour tout entier $k>0$ *on a :* $\displaystyle\int_k^{k+1}\frac{1}{\sqrt{x}}dx\leq\frac{1}{\sqrt{k}}$.

et que, pour tout entier $k>1$, $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{k}}\leq\int_{k-1}^{k}\frac{1}{\sqrt{x}}dx$.

b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq1}$ *définie par :* $u_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}-2\sqrt{n}$ *, est convergente, et que sa limite* ℓ *vérifie* $-2\leq\ell\leq-1$.

Exercice 9

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ *par :* $F(x)=\displaystyle\int_x^{2x}\frac{1}{\sqrt{t^4+t^2+4}}dt$.

a) Montrer que F est une fonction impaire.

b) Montrer que la fonction F est dérivable puis calculer $F'(x)$ *pour x réel et déterminer le signe de* $F'(x)$.

c) Montrer que pour tout $x>0$, *on a les inégalités* $0\leq F(x)\leq\dfrac{x}{\sqrt{x^4+x^2+4}}$.

d) Déduire de ce qui précède que la fonction F est bornée sur $\mathbb{R}$ *et donner un majorant irrationnel de* $|F|$.

Tracer approximativement le graphe de F

Exercice 10

Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$. *Montrer que les fonctions F définies ci-dessous sont dérivables et calculer F ' (x).*

a) $F(x)=\displaystyle\int_a^b f(x+t)\cos t\ dt$ b) $F(x)=\displaystyle\int_a^b f(x-t)\left(1+t^2+\sin t\right)dt$.

Exercice 11

Calculer la dérivée des fonctions F définies sur $\mathbb{R}$ par :

a) $F(x)=\int_{3x-1}^{x^2+1} e^{(t-x)^2}\,dt$ b) $F(x)=\int_{2x+1}^{x^2+2} e^{(t+x)^2}\,dt$

Exercice 12

Calculer la limite des suites définies ci-dessous.

a) $u_n=\int_{n}^{4n}\frac{1+e^{-t}}{t}\,dt$ b) $v_n=\int_{n}^{n+1}\frac{1+e^{-t}}{t}\,dt$.

Exercice 13

Calculer la limite des suites définies ci-dessous.

a) $u_n=\int_{n^2}^{2n^2}\frac{\arctan\frac{x}{n}}{x}\,dx$

b) $v_n=\int_{n^2}^{n^4}\frac{\arctan\frac{x}{n}}{x\ln x}\,dx$.